

Détection d'un signal déterministe dans un bruit.

Première partie (utilisation d'un filtre RC).

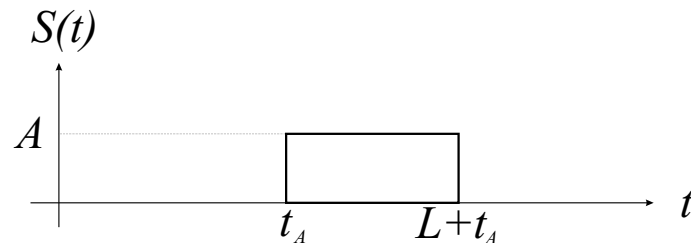
Tous les signaux temporels considérés dans ce problème sont à valeurs réelles. Une observation est constituée comme suit :

$$H_0 : x(t) = B(t), \quad t \in R \quad (\text{Hypothèse bruit seul})$$

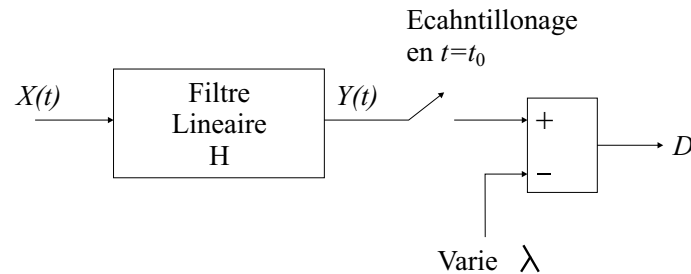
$$H_1 : x(t) = B(t) + S(t), \quad t \in R \quad (\text{Hypothèse signal + bruit})$$

B est un bruit blanc gaussien centré de DSP égale à a

S est un signal déterministe ayant la forme suivante :



Pour décider de la présence (H_1) ou de l'absence (H_0) de S dans X on introduit le dispositif suivant



où D représente une décision obtenue comme suit :

$$D = \delta_0 \quad \text{si} \quad y \leq \lambda \quad (\text{on accepte } H_0)$$

$$D = \delta_1 \quad \text{si} \quad y > \lambda \quad (\text{on accepte } H_1)$$

On notera Y_S et Y_B les réponses respectives à S seul et B seul.

On se propose d'étudier le cas où H correspond à un filtre RC passe-bas, de réponse harmonique :

$$\widehat{H}_1(f) = \frac{1}{1 + 2\pi f\theta} \quad \theta = RC$$

1. Sous l'hypothèse H_0 , quelle est la puissance statistique moyenne $E(Y^2(t)|H_0)$, de la sortie Y du filtre ? Représenter graphiquement cette puissance en fonction de θ . Expliquer ce qu'on obtient pour les faibles valeurs de θ .

2. Calculer et représenter graphiquement $Y_S(t)$.

Donner l'expression du rapport signal sur bruit en $t = t_0$, en sortie du filtre défini par :

$$r = \left[\frac{S}{B}\right]_y = \frac{|Y_S(t_0)|^2}{E(Y_B^2(t))}$$

pour $t_0 = L + t_A$ en fonction de A, L, θ, a . représenter graphiquement, à l'aide de Matlab $\theta \rightarrow \left[\frac{S}{B}\right]_Y$ pour $A = 1, L = 1, a = 2$; que constatez-vous ?

3. Quelle sont les densités de probabilité de $y = y(t_0)$ sous, d'une part l'hypothèse H_0 et, d'autre part, l'hypothèse H_1 . Représenter graphiquement en Matlab les 2 densités de probabilité pour $A = 1, L = 1, a = 2$. Pour des valeurs de θ égales à 0.0001, 0.001, 0.01.

4. On choisit une valeur de seuil λ comprise entre 0 et $A(1 - e^{-\frac{L}{\theta}})$.

Expliquer qualitativement comment varient P_{e1}, P_{e2} et P_d quand λ varie.

On rappelle les définitions :

- $P_{e1} = PFA$: probabilité d'erreur $P(D = \delta_1|H_0)$
- P_{e2} : probabilité de non détection $P(D = \delta_0|H_1)$
- $P_d = 1 - P_{e2}$: probabilité de détection vraie

5. On définit $v \rightarrow g(v) = \int_v^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$

donner l'expression de P_{e1}, P_{e2}, P_d au moyen de g en fonction de λ , $\sigma_y = \sqrt{\frac{a}{2\theta}}$ et $\mu = A(1 - e^{-\frac{L}{\theta}})$