I-On considère un couple de VA (X, Y) admettant une densité de probabilité conjointe:

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right]\right)$$

avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$, σ_1 et σ_2 réels positifs.

Une telle loi est appelée loi Gaussienne (ou encore normale) continue de dimension 2.

1) Calculer les densités marginales $p_X(x), x \in \mathbb{R}$ et $p_Y(y), y \in \mathbb{R}$ par intégration de la densité conjointe et vérifier que les moyennes et variances pour X et Y correspondent bien aux paramètres $m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$.

2) Vérifier que X et Y sont indépendantes ssi $\rho = 0$

3) Lois conditionnelles ? Espérances conditionnelles ?

Rappels:

i) La densité conditionnelle de X si $Y = y$ est définie par

$$p_{X/Y=y}(x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}, x \in \mathbb{R} \text{ si } p_Y(y) > 0 \text{ et } p_{X/Y=y}(x) = 0, x \in \mathbb{R} \text{ si } p_Y(y) = 0$$

ii) L'espérance conditionnelle de X si $Y = y$ est définie par:

$$E(X/Y=y) = \int_{\mathbb{R}} xp_{X/Y=y}(x)dx$$

II - Soit $X = [X_1, X_2, X_3]^T$ un vecteur aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, de loi gaussienne et tel que

$$m_X = [m_{X_1} \quad m_{X_2} \quad m_{X_3}]^T = \mathbf{0} \text{ et } C_{X_C} = E(X_C X_C^T) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

On introduit les VA $Y_1 = X_1 + X_3$ et $Y_2 = X_2 - X_3$.

- 1) Ecrire la densité de probabilité du vecteur aléatoire de dimension $Y = [Y_1 \quad Y_2]^T$ (cad la densité du couple (Y_1, Y_2)), si elle existe.
- 2) Trouver une matrice carrée A et une matrice colonne B telles que le vecteur aléatoire $Z = AY + B$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ soit un vecteur dont les 2 coordonnées sont indépendantes, de moyennes respectives égales à -1, 2 et de même variance unité.
- 3) Trouver la matrice ligne (dim 1×2) $H = [a \quad b]$ telle que l'écart quadratique moyen entre HY et X_1 défini classiquement comme étant égal à $E((X_1 - HY)^2)$, soit minimum.
- 4) En posant $Z = HY$ écrire la densité de probabilité conditionnelle de X_1 si $Z = z$.

III - Soit (X, Y) un couple de VA réelles indépendantes et de même loi gaussienne centrée réduite. Soit d'autre par le SA (signal aléatoire) défini par $Z(t) = X \cos(2\pi f_0 t) + Y \sin(2\pi f_0 t), t \in \mathbb{R}$ où f_0 est une valeur de fréquence (réel non nul fixé).

- 1) On rappelle qu'un SA Z est gaussien si, par définition, $\forall N : \forall t_1, \dots, t_N : (Z(t_1), \dots, Z(t_N))$ est de loi conjointe gaussienne¹. Montrer qu'il en est ainsi pour Z défini plus haut.
- 2) Ecrire la densité de probabilité conjointe de $(Z(t_1), Z(t_2))$ pour $t_1 \neq t_2$.
- 3) Calculer $m_X(t) = E(Z(t)), t \in R$. et $E(Z(t)Z(t-\tau)), (t, \tau) \in R^2$.
- 4) Exprimer $E(Z(t_2) / Z(t_1) = z), z \in R, t_2 > t_1$

¹ On rappelle également qu'un vecteur aléatoire de dimension N et de coordonnées $X_1, \dots, X_k$ est de loi gaussienne ssi toute combinaison linéaire $\sum_1^N \alpha_k X_k$ correspond à une variable aléatoire gaussienne.