TD : Suites de fonctions

Mathématiques
Licence STS Mention Electronique, année 2004-2005

Laboratoire LTSI - Université de Rennes1

Exercice 1.

Etudier en terme de convergence simple et uniforme les suites de fonctions définies par :
1. $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$ pour tous $x \in [0,1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$;
2. $g_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$ pour tous $x \in [0,1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$;
3. $h_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)$ pour tous $x \in [0,+\infty[$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.

Examiner la convergence[1] en moyenne et en moyenne quadratique des suites de fonctions définies par :
1. $f_n(x) = \sqrt{n}\mathrm{e}^{-n^2x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (utiliser $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$)
2. $g_n(x) = \begin{cases} \frac{n^2\sin(nx)}{2\pi} \text{ pour tout } x \in [-\pi/n, \pi/n] \,; \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$;
3. $h_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi n^2}\sqrt{n^2-x^2} \text{ pour tout } x \in [-n,n] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Exercice 3.

Déterminer si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses. On donnera une démonstration complète dans le premier cas et un contre-exemple dans le deuxième cas. Les fonctions f_n (non nécessairement continues) sont définies sur un intervalle I.

1. Si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si f est bornée sur I, alors chaque f_n est bornée sur I. (On rappelle que f est bornée sur I si et seulement si il existe $B > 0$ tel que, pour tout x de I on ait $|f(x)| < B$) ;

2. Si (f_n) et (g_n) convergent uniformément respectivement vers f et g sur I, alors $(f_n + g_n)$ converge uniformément vers $f + g$ sur I ;

3. Si (f_n) et (g_n) convergent uniformément respectivement vers f et g sur I, alors (f_ng_n) converge uniformément vers fg sur I ;

4. Si (f_n) converge uniformément sur $[a,b[$ et si la suite numérique $(f_n(b))$ est convergente, alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$.

[1] Attention : la convergence uniforme n'implique les trois autres que si l'on travaille sur un compact (fermé borné).