

TD de TRF – Liste 2

I. 1. γ étant un contour fermé entourant l'origine, décrit dans le sens direct :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} z^{n-1} dz = \delta_{n0} \quad \left(\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \right)$$

Justifier ce résultat en terme de résidu, en distinguant les cas $n \geq 1$, $n = 0$, $n \leq -1$. Avec un paramétrage du cercle de rayon r dans l'intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} z^{n-m-1} dz, \text{ montrer que : } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \delta_{nm}.$$

Vérifier ce résultat par une intégration directe.

2. Soit le DSL : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ d'une fonction analytique dans $A(0, r_1, r_2)$, $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$.

La fonction de période 2π : $g(t) = f(re^{it})$ est une restriction de f au cercle de rayon r , $r_1 < r < r_2$. Montrer que dans le développement en série de Fourier (DSF) de g :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}, \text{ on a : } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt = a_n r^n.$$

3. Développer la fonction $\frac{1+z}{1-z}$ en série entière dans le disque $|z| < 1$. En déduire les DSF :

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} r^n \cos nt, \quad \frac{r \sin t}{1+r^2-2r\cos t} = \sum_{n \geq 1} r^n \sin nt, \quad 0 \leq r < 1.$$

II. Soit $f(t)$ la fonction de période 2π définie dans $[-\pi, +\pi]$ par :

$$f(t) = 0 \quad \text{si } -\pi \leq t \leq 0, \quad f(t) = \sin t \quad \text{si } 0 \leq t \leq \pi.$$

1. Développer cette fonction en série de Fourier au moyen d'exponentielles complexes, puis à l'aide des fonctions sinus et cosinus.

Attention : dans le calcul des c_n , on distinguera soigneusement le cas $n \neq \pm 1$ du cas : $n = \pm 1$. Indiquer le type de convergence des séries obtenues.

2. Vérifier les formules : $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{4p^2 - 1} = \frac{1}{2}$, $\sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p}{4p^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

III. Soit $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Soit la fonction 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \cos \alpha x \quad \text{pour } |x| < \pi.$$

Calculer les coefficients de Fourier de f . Etudier la série de Fourier ainsi obtenue. En déduire que si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$\pi \cotg \pi z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}, \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}$$

Vérifier à nouveau les formules II. 2.

IV. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, de période 2π : $f(t) = \frac{4}{5 - 3\cos(t)}$.

1. En intégrant sur le cercle unité $|z| = 1$ du plan complexe, montrer que : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \frac{5}{4}$.

2. En intégrant sur le cercle unité parcouru dans le sens indirect, calculer le coefficient c_n , pour $n \geq 0$, du DSF de f : $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$.

3. En déduire le DSF de f en termes réels : $1 + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nt)}{3^n}$, et discuter sa convergence vers f .

4. En calculant une série numérique associée au DSF, retrouver la valeur de l'intégrale de f^2 en 1.