TD 2 : Séries de fonctions & séries entières

DEUG STPI, semestre 4, année 2003-2004

Séries de fonctions

Rappel sur les séries numériques.

1. critère de d'Alembert : si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell < 1$ quand $n \to +\infty$ alors $\sum u_n$ converge;
2. critère de Cauchy : si $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell < 1$ quand $n \to +\infty$ alors $\sum u_n$ converge;
3. théorème des séries alternées : si $u_n = (-1)^n |u_n|$ et si la suite $|u_n|$ est décroissante et tend vers 0 quand $n \to +\infty$ alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 1.

Montrer que la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^n}$ converge uniformément sur $[-1{,}1]$ (indication : on cherchera à écrire la série comme la somme de deux séries dont l'une est égale à $\sum \frac{(-1)^n}{n}$).

Exercice 2.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^n)}{n} - \frac{(x^{n+1})}{n+1}$ converge uniformément sur $[-1{,}1]$ (indication : on cherchera dans un premier temps à simplifier l'écriture de la série).
2. Montrer que la série converge normalement sur $[0{,}1]$ mais pas sur $[-1{,}0]$ (indication : en notant $u_n(x)$ le terme général de la série, on s'aidera de l'étude de variations de $u_n(x)$ sur $[0{,}1]$ et de $(-1)^n u_n(x)$ sur $[-1{,}0]$).

Exercice 3.

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(sin(x))^n}$ converge normalement sur $]0,\pi[$ (indication : on cherchera à effectuer une majoration à l'aide d'une série bien choisie, le critère de d'Alembert pourra être employé pour démontrer la convergence de cette dernière).

Exercice 4.

Soit $I =]1, +\infty[$. Pour tout x appartenant à I, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$.

1. vérifier que f est définie sur I;
2. montrer que f est continue sur I (on rappelle que si (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I, (ii) $\sum_n f_n$ converge uniformément sur I, alors $f(x)$ est continue sur I);
3. montrer que f est de classe C^1 sur I;
4. montrer que $f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $x \to 1^+$ (on cherchera à minorer à l'aide d'une série géométrique).

Exercice 5.

Soient deux suites de fonctions $u_n(x)$ et $v_n(x)$ convergeant uniformément vers $u(x)$ et $v(x)$ sur $]a,b[$.

1. montrer que $u_n(x) + v_n(x)$ converge uniformément;

2. on suppose de plus que $u_n(x) \leq A$ et $v_n(x) \leq B$ pour tout n et pour tout $x \in]a,b[$. Montrer de ce fait que $u_n(x)\, v_n(x)$ converge uniformément.

Exercice 6.

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = x^n \frac{\cos(nx)}{n}$.

1. montrer que cette série est uniformément convergente sur tout intervalle $]-(1-\epsilon),(1+\epsilon)[$;
2. calculer sa somme.

Exercice 7.

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \frac{\cos(2nx)}{n^2}$.

1. montrer que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$;
2. calculer sa somme.

Séries entières.

Rappel.

1. critère de d'Alembert : soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}_+$ quand $n \to +\infty$ alors le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est : $R = \frac{1}{\ell}$ (où par convention, "$\frac{1}{0} = +\infty$" et "$\frac{1}{+\infty} = 0$"); notons que la limite ℓ peut ne pas exister alors que le rayon R est fini, le critère d'Alembert est une condition suffisante et non nécessaire;
2. si $|a_n|$ admet un équivalent $|b_n|$ quand n tend vers l'infini, alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ ont même rayon de convergence;
3. une série entière a même rayon de convergence que sa série entière dérivée;
4. s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que :
   - pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $a_n z^n \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$,
   - pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée,

   alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est égal à R.

Exercice 1.

Soient les séries entières suivantes $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

1. vérifier que pour ces deux séries, le rayon de convergence R est égal à 1;
2. Pour tout $|z| < R$, calculer la somme de ces deux séries (indication : on cherchera à calculer la dérivée de ces deux séries).

Exercice 2.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt[3]{n^3+n+2} - \sqrt[2]{n^2+1}\right) z^n$ (indication : on rappelle que le développement limité d'ordre m en 0 de $(1+x)^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ est donné par $1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{m!}x^m + o(x^m)$);
2. $\sum_{n\geq 1} (\ln(n)^n)\, z^n$;
3. $\sum_{n\geq 2} \left(\ln(n)^{\ln(n)}\right) z^n$;
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} z^{n^2}$.