TD : Espaces vectoriels (1)

Compléments mathématiques
Licence STS Mention Electronique et Télécommunications

Exercice 1.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et $E = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \mathbb{R}$ (n fois). Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, en définissant comme lois d'addition et de multiplication :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

Montrer que, muni de ces deux lois, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$. On définit l'addition dans E par $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 + y_2)$ et la multiplication externe sur E, ayant $\mathbb{R}$ comme corps des scalaires, par $\lambda\,(x_1, x_2) = \big((x_1)^\lambda, \lambda x_2\big)$. Montrer que, muni de ces deux lois, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 3.

1. Notons E l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, i.e. les éléments de E sont les fonctions du type $f(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Donner une base de E, puis calculer sa dimension.
2. D'autre part, considérons l'ensemble F_n des polynômes trigonométriques à coefficients réels du type :

$$f(t) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

Montrer qu'il s'agit également d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, donner une base et la dimension de cet espace vectoriel.

Exercice 4.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned}
A &= \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - 4x_3 = 0\big\} \\
B &= \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 2x_2 + x_3 = 1\big\} \\
C &= \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 x_2 - x_3 = 0\big\} \\
D &= \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 2x_2 = 0 \text{ et } x_3 - x_1 = 0\big\}
\end{aligned}$$