Magistère MIT

TD Traitement du Signal: notions de probabilités

<u>Exercice 1</u>. Soit (X,Y) un couple de VA réelles indépendantes et de même loi gaussienne centrée réduite. Soit d'autre part le SA (signal aléatoire) défini par $Z(t) = X\cos(2\pi f_0 t) + Y\sin(2\pi f_0 t), t \in R$ où f_0 est une valeur de fréquence (réel non nul fixé).

1) On rappelle i) que <u>toute</u> transformation linéaire d'un vecteur de loi gaussienne donne un vecteur de loi gaussienne et ii) qu'un signal aléatoire $Z(t), t \in R$ est gaussien si, par définition, $\forall N : \forall t_1,..,t_N : (Z(t_1),..,Z(t_N))$ est un vecteur de loi conjointe gaussienne . Montrer qu'il en est ainsi pour Z défini plus haut.
2) Z est-il stationnaire au sens large ?
3) Ecrire la densité de probabilité conjointe de $(Z(t_1), Z(t_2))$ pour $t_1 \neq t_2 + k/2f_0, k \in \mathbb{Z}$.
4) Sachant que Z est défini comme étant stationnaire au sens strict si $\forall N$ et à N fixé $\forall t_1,..,t_N$ la loi de $(Z(t_1+\theta),..,Z(t_N+\theta))$ ne dépend pas de $\theta \in R$, peut on dire ici que Z est stationnaire au sens strict ?
5) Exprimer $E(Z(t_2)/Z(t_1)), t_2 > t_1$. On rappelle que pour un vecteur gaussien toutes les lois marginales sont gaussiennes.

<u>Exercice 2</u>. Soit $N(t) = \sum_{i\geq 0} 1_{[T_i,\infty[}(t), t > 0$ un processus de comptage de Poisson. Les $T_i, i = 0,1,..$ constituent une suite aléatoire croissante correspondant aux instants d'un processus de Poisson ponctuel d'intensité constante (nombre moyen d'instants par unité de temps) égale à λ (réel positif). Soit d'autre part la variable aléatoire X_0 admettant pour moyenne et variance respectivement m_0 et σ_0^2 et qui est supposée indépendante des $T_i, i \geq 0$. Le signal aléatoire (SA) est alors défini par :

- $X(0) = X_0$,
- si $t > 0, X(t) = X_0$ quand $N(t)$ est pair et $X(t) = -X_0$ quand $N(t)$ est impair.

1) Exprimer au moyen de fonctions exponentielles la probabilité pour que $N(t)$ soit pair.
2) Calculer $m_X(t)$ et $C_X(t, t-\tau)$ pour $t > 0$ et $t - \tau > 0$.
3) Que peut-on dire relativement à la stationnarité de *X sur* R^+ si $E(X_0) = 0$?

<u>Exercice 3</u>. On considère le SAD $X[n], n \in \mathbb{Z}$ défini par la relation de récurrence :

$X[n+1] = a \cdot X[n] + \varepsilon[n+1], n \in \mathbb{Z}$ (1)

où ε correspond à une suite de VA indépendantes à valeurs dans R de même loi $N(0,\sigma^2)$ et où le réel a est inférieur en valeur absolue à 1.

On considère la restriction de (1) à $n \geq 0$ avec la condition initiale : $X[0]$ est une VA de loi $N(m, \sigma_0)$ et indépendante des $\varepsilon[k], k \geq 1$.

1) Ecrire la relation entre $X[n]$ et les variables $X[0], \varepsilon[1], ..., \varepsilon[n]$.
2) Exprimer $E(X[n]X[n+p])$ pour n et $p \geq 0$ en utilisant i) et en déduire la moyenne et la covariance de $X[n], n \geq 0$.
3) Etablir directement une relation de récurrence entre $C_X[n,m]$ et $C_X[n,m+1]$ à partir de la relation (1) pour $m \geq n$
4) Donner une condition sur m et σ_0 pour que $E(X[n])$ et $E(X[n]X[n+p])$ ne dépendent pas de $n \geq 0$ quand $p \geq 0$.

5) Montrer que X est un processus de Markov (d'ordre 1) et écrire la loi de probabilité conjointe de $X[n], X[n+p], X[n+q], q > p > 0, n \geq 0$.

Exercice 4. On considère un SA discret qui correspond, sur N , à une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $\{0, A\}$, A étant un réel. Les probabilités de transition de 0 à A et de A à 0 ont pour valeurs respectives p et q .

On veut calculer la covariance $C_X[n, n+k]$ pour n et k positifs où nuls.

1) Exprimer $C_X[n, n+k]$ en fonction de A , des probabilités de transition en k étapes $P_{A/A}(k)$ et des probabilités $P_A(n)$ d'être en A à l'instant n .

2) Montrer que l'on a :

$$P_{A/A}(k+1) = (1-p-q) \cdot P_{A/A}(k) + p, P_{A/A}(0) = 1$$

3) La chaîne étant ergodique la limite de $P_{A/A}(k)$ pour k grand est égale à la probabilité stationnaire P_A de se trouver dans l'état A . En déduire, en tenant compte de 2) que $P_A = \dfrac{p}{p+q}$

4) Résoudre l'équation donnée en 2) et en déduire que la covariance $C_X[n, n+k]$, en régime stationnaire, ne dépend que de k.

5) Quelles sont la moyenne et la variance de $X[n]$ en régime stationnaire.