Université Rennes I, M1 Electronique 2004/2005
TD Traitement du Signal : liste1
(cours Bellanger : jean-jacques-bellanger@univ-rennes1.fr)

**Remarque** : ne pas hésiter à poser des questions à la fin des cours ou TD ou par un autre canal

## SIGNAUX PERIODIQUES ET MOYENNES TEMPORELLES

**I-** Donner une preuve de la relation suivante, vraie pour tout signal périodique de période $\Delta$ et pour tout réel $a$ :

$$\overline{X} = \lim_{T_1\to\infty, T_2\to\infty} \frac{1}{T_1+T_2}\int_{-T_1}^{T_2} X(t)dt = \frac{1}{\Delta}\int_a^{a+\Delta} X(t)dt$$

*Indication*

Utiliser la décomposition :

$$\frac{1}{T_1+T_2}\int_{-T_1}^{T_2} X(t)dt = \frac{1}{T_1+T_2}\int_{-k\Delta}^{l\Delta} X(t)dt + \frac{1}{T_1+T_2}\int_{-T_1}^{-k\Delta} X(t)dt + \frac{1}{T_1+T_2}\int_{l\Delta}^{T_2} X(t)dt = I_1+I_2+I_3$$

(où $l$ et $k$ sont tels que $l\Delta < T_2 < (l+1)\Delta$ et $-(k+1)\Delta < -T_1 < -k\Delta$)

et montrer que pour $T_1, T_2$ grands $I_1 \cong \frac{1}{(k+l)\Delta}\int_{-k\Delta}^{l\Delta} X(t)dt$, $I_2 \cong 0$ et $I_3 \cong 0$

**II-** La fonction d'autocorrélation temporelle d'un signal $X$ de puissance moyenne finie ($\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |X(t)|^2 dt < \infty$) est définie par $COR(X,X)(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} X(t)X^*(t-\tau)dt$

NB : on pourrait plus généralement intégrer entre $-T_1$ et $+T_2$ mais on simplifie un peu ici .

**1)** On considère un signal $S$ périodique de période $\Delta$ et son développement en série de Fourier : $\sum_{k\in Z} c_n(S)\exp 2\pi i\frac{k}{\Delta}t$ .

Montrer que $COR(Y,Y)(\tau), \tau\in R$ est elle aussi périodique ; calculer ses coefficients de Fourier en fonction de ceux de *Y*.

**2)** Calculer directement dans le domaine temporel $COR(Z,Z)$ pour un signal périodique $Z$ de période $\Delta$ et de forme rectangulaire : $Z(t) = A$ sur $[0,\alpha\Delta], \alpha\in ]0,1[$ et $Z(t)=0$ sur le reste de la période. Retrouver le résultat pour $\alpha = 1/2$ en utilisant 1) et la forme (connue : voir dans une table) des coefficients de Fourier pour des signaux périodiques de forme carrée et de forme triangulaire.

**III-** On considère un signal périodique de période $\Delta$ défini sur $[0,\Delta]$ par
$X(t) = At$ si $0 < \text{t} \le \alpha\Delta$ et $X(t) = A\alpha\Delta/2$ si $\alpha\Delta < t < \Delta$ où $\alpha\in ]0,1[$ :

**1)** Calculer la moyenne temporelle et la valeur quadratique moyenne pour ce signal :

$$\overline{X} = \lim_{T_1\to\infty, T_2\to\infty} \frac{1}{T_1+T_2}\int_{-T_1}^{T_2} X(t)dt$$

$$\overline{X^2} = \lim_{T_1\to\infty, T_2\to\infty} \frac{1}{T_1+T_2}\int_{-T_1}^{T_2} |X(t)|^2 dt$$

**2)** Calculer la fonction de répartition temporelle des amplitudes :

$$F(x) = \overline{X} = \lim_{T_1\to\infty, T_2\to\infty} \frac{1}{T_1+T_2} \int_{-T_1}^{T_2} 1_{X(t)<x}\, dt \quad (\ 1_C = 0 \text{ si } C = \text{vrai et} = 0 \text{ sinon})$$

*Indication*

Entre $x = 0$ et $x = A\alpha\Delta$ $F(x)$ a la forme d'une fonction affine avec une discontinuité (un saut dont on déterminera l'amplitude)

**3)** Calculer $F'(x)$ (qui comporte une distribution de Dirac puisque $F$ comporte un saut), puis calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} xF'(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2F'(x)dx$ et vérifier enfin que ces 2 dernières quantités sont respectivement égales à $\overline{X}$ et $\overline{\mathrm{X}^2}$ .

**IV**-Donner les axiomes de définition d'un produit scalaire $< X_1, X_2 >$ entre 2 vecteurs $X_1, X_2$ pris dans un espace vectoriel (rechercher dans un cours de math si nécessaire). Qu'appelle-t-on inégalité de Schwartz ?

Montrer que l'application qui associe à 2 signaux d'énergie finie $X_1(t), X_2(t), t \in R$ le nombre (en général complexe) $\int_R X_1(t)X_2^*(t)dt$ correspond à un produit scalaire et écrire l'inégalité de Schwartz correspondante.

## CALCUL DES PROBABILITES

**I-** Que représente la valeur numérique $F_X(x)$ si $F_X$ est la fonction de répartition d'une VA (variable aléatoire) $X$ ? Expliquer pourquoi $F_X(\infty) = 1$ et $F_X(-\infty) = 0$.

**II-** Qu'appelle-t-on fonction densité de probabilité $p_X$ d'une VA $X$ ? Existe-t-elle toujours ? Quelle est la relation mathématique entre la densité de probabilité et la fonction de répartition de $X$ ?

**III-** Exprimer la probabilité des événements $\{X \in [a,b]\}$, $\{X < 2 \text{ ou } X \geq 3\}$ en fonction de $F_X$ puis en fonction de $p_X$ si cette dernière existe.

**IV-** On tire un nombre au hasard (VA *X*) entre 0 et 2, puis un $2^{\text{ème}}$ nombre au hasard entre –2 et 1 (VA *Y)* de manière indépendante du premier.

**1)** Calculer les espérances mathématiques $E(X), E(2X+4Y), E(XY), E(5\sin \pi X)$.

**2)** Donner la densité de probabilité du couple $(X, Z = X+Y)$ et son coefficient de corrélation.Trouver la fonction de répartition de *Z*.

**3)** Calculer $E(Z / X = x)$ et en déduire $E(Z)$. Comparer avec $E(X)+E(Y)$ et $\int_R z p_Z(z)dz$ .