TD : Espaces de fonctions

Mathématiques
Licence STS Mention Electronique, année 2004-2005

`Laboratoire LTSI - Université de Rennes1`

Exercice 1.

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les intégrales suivantes sont définies. Le cas échéant, calculer ces dernières :
1. $I = \int_0^1 \log(x)\, dx$
2. $J_\alpha = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$
3. $K_\alpha = \int_0^1 \frac{\log(x)}{x^\alpha} dx$

Les fonctions $\log(x)$, $\frac{1}{x^\alpha}$ et $\frac{\log(x)}{x^\alpha}$ appartiennent-elles à $L^1([0,1])$?

Exercice 2.

1. Montrer que toute fonction g continue sur $\mathbb{R}$ est localement sommable ;
2. Montrer que son produit par une fonction localement sommable est une fonction sommable ;
3. Déterminer deux fonctions localement sommables dont le produit ne l'est pas.

Exercice 3.

On considère $C([0,1])$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$.
1. Montrer que pour tout $f \in C([0,1])$, $\int_0^1 |f(x)|\, dx$ définit une norme sur $C([0,1])$;
2. On considère la suite de fonctions suivante :

$$f_n = \begin{cases} n \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{n^2}\right] \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ si } x \in \left[\frac{1}{n^2}, 1\right] \end{cases}$$

f_n est-elle de Cauchy ? L'espace $C([0,1])$ est-il complet ?

Exercice 4.

On considère l'espace de fonctions E défini par $C([0,1]) \cap L^2([0,1])$ avec pour norme associée celle de $L^2([0,1])$. Montrer à l'aide de la suite de fonction suivante que E n'est pas complet :

$$f_n = \begin{cases} n \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{n^3}\right] \\ x^{-1/3} \text{ si } x \in \left[\frac{1}{n^3}, 1\right] \end{cases}$$