TD de TRF – Liste 1

I. Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ diverge (indication : pour $n \geq 1$, minorer $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$ par le terme général d'une série divergente).

II. Soit $f(x)$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -\frac{\cos 2\pi x}{\pi^2 x^2} + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi^3 x^3} \text{ si } x \neq 0,\ f(0) = 4/3.$$

Cette fonction est-elle continue ? Est-elle indéfiniment dérivable ? Est-elle sommable ?

III. Trouver la limite simple de la suite de fonctions $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n 1_{[0,n]}(x)$. Montrer que pour $x \geq 0$, $f_n(x) \leq e^{-x}$; en déduire la limite de $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$ (indication : $\ln x \leq x - 1$).

IV. Montrer que pour tout intervalle de longueur finie Δ, $L^2(\Delta) \subset L^1(\Delta)$. Cette propriété est fausse dans $\mathbb{R}$. A l'aide des contre-exemples,

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}\left(x^2+1\right)},\ \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ \frac{1}{\left(x^2+x^4\right)^{1/3}},\ \frac{1}{\left(x^2+x^4\right)^{1/5}},$$

montrer qu'il n'y a pas de relation d'inclusion entre $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$.

V. $\ell^1(\mathbb{Z})$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$ désignent respectivement l'ensemble des suites (x_n) sommables $\left(\sum_n |x_n| < \infty\right)$, et de carré sommable $\left(\sum_n |x_n|^2 < \infty\right)$. Relation d'inclusion entre $\ell^1(\mathbb{Z})$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$.

VI. **1.** Montrer que la fonction (gamma) : $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\ e^{-t} dt$ est continue et holomorphe dans le ½ plan droit $\Re e(z) > 0$ (commencer par montrer que l'intégrale est absolument convergente). Si $n \geq 1$, $\Gamma(n) = (n-1)\ !$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Montrer que pour x réel > 0, la fonction $\Gamma(x)$ est convexe $\left(\Gamma''(x) > 0\right)$. Tracer la courbe de $\Gamma(x)$ pour x réel > 0.

2. Exprimer l'intégrale de Laplace : $F(p) = \int_0^\infty t^\nu e^{-pt} dt$, $p = \sigma + i\omega$, $\nu > -1$, en fonction de $\Gamma(\nu)$, et préciser l'abscisse de convergence absolue σ_1 de l'intégrale.

VII. Soit *f* la fonction définie sur le pavé ouvert $]0,1[\times]0,1[=]0,1[^2$ par :

$$f(x,y)=\begin{cases} 2^{2n} & \text{si } \dfrac{1}{2^n}\le x<\dfrac{1}{2^{n-1}} \quad \text{et } \dfrac{1}{2^n}\le y<\dfrac{1}{2^{n-1}},\ n\ge 1 \\ -2^{2n+1} & \text{si } \dfrac{1}{2^{n+1}}\le x<\dfrac{1}{2^n} \quad \text{et } \dfrac{1}{2^n}\le y<\dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy=0$ et que $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx=1$.

2. La fonction *f* est-elle sommable dans $(0,1)^2$?