TD 1 : Calcul intégral

DEUG STPI, semestre 4, année 2003-2004

Exercice 1.

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^\alpha}\,dx \tag{1}$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^\beta}\,dx \tag{2}$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi f t}\,dt \text{ , où } x(t) = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t) \tag{3}$$

et calculer leur valeur.

Exercice 2.

Soit $f : [1,+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^a}$, où a est un nombre réel strictement positif.

1. Montrer que f est absolument intégrable pour $a > 1$;
2. montrer que f est intégrable pour $a > 0$, en l'occurrence pour $a \in]0,1]$;
3. montrer que f est n'est pas absolument intégrable pour $a \in]0,1]$.

Exercice 3.

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x^4+x^2+1} \quad ; \quad g(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} \quad ; \quad h(x) = \mathrm{Arctg}(x) \quad ; \quad k(x) = \mathrm{e}^x\cos(x) \quad ; \quad \ell(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \tag{4}$$

Exercice 3.

Soit f une fonction continue sur $[-a,a]$ et $I = \int_{-a}^{a} f(t)dt$. A l'aide d'un changement de variable approprié, montrer que si f est impaire alors $I = 0$, et que si f est paire alors $I = 2\int_0^a f(t)dt$.