

II Principes de synthèse

2.1 Synthèse de filtres MA

2.1.1 Synthèse de filtres MA par coefficients de Fourier

Considérons un gabarit $G(f) = 1$ si $f \in [-B, B]$, ($= 0$ sinon) sur $[-1/2, 1/2[$, avec $0 < B < 1/2$, correspondant à ce qu'on appelle un filtre passe-bas idéal de largeur de bande normalisée égale à $2B$. Sa réponse impulsionnelle est :

$$g[n] = \int_{-1/2}^{1/2} G(f) e^{2\pi i n f} df$$

$$= \int_{-B}^B e^{2\pi i n f} df = \frac{\sin(2\pi n B)}{\pi n}, n \in Z$$

étant donné que par définition la réponse en fréquence est égale à la somme de Fourier

$$G(f) = TFS(g)(f) = \sum_{n \in Z} g[n] e^{-2\pi i n f}, f \in R$$

où les coefficients $g[n]$ sont ceux du développement de Fourier de G sur les fonctions de base orthonormées $(e^{-2\pi i n f}, f \in R), n \in Z$.

Ce filtre ne convient évidemment pas puisqu'il n'est pas à support fini et qu'il n'est pas causal. Une idée naturelle est alors de ne retenir pour H qu'une sous-suite de g . Pour obtenir un filtre dont le module de la réponse en fréquence reste proche du gabarit et pour lequel la distorsion de phase est évitée (ce qui revient à dire que la relation entre la fréquence et la phase doit être la plus linéaire possible) cette sous suite doit cependant être paire ou impaire autour d'un instant de référence n_0 :
 $H[n_0 + n] = \pm H[n_0 - n], n \in \{n_0 - (N - 1)/2, n_0 + (N - 1)/2\}$, où N est l'ordre du filtre supposé ici impair pour simplifier.

Pour que le filtre soit causal, tout en minimisant le retard introduit, n_0 doit être pris égal à $(N - 1)/2$. Dans cet esprit on peut choisir comme réponse impulsionnelle causale :

$$H[n] = g[n - (N - 1)/2], n = 0, \dots, N - 1$$

La relation suivante, qui fait intervenir un produit de convolution périodique ($CONVP(\dots)$), traduit alors l'effet de distorsion, sur la réponse en fréquence du filtre, par rapport au gabarit désiré:

$$\hat{H}(f) = \exp(-2\pi i f (N - 1)/2) \cdot CONVP(\hat{P}_N, G)(f) \quad f \in [-1/2, 1/2[$$

où $P_N[n] = 1_{\{-(N-1)/2, \dots, (N-1)/2\}}[n]$, $n \in \mathbb{Z}$ est la fonction porte en temps discret (centrée sur l'origine) et où l'exponentielle complexe correspond à un déphasage linéaire en fonction de la fréquence correspondant à un retard pur de $(N-1)/2$ unités du temps discret. Dans le résultat de la convolution de G avec \hat{P}_N apparaissent des sur-oscillations à hauteur des discontinuités de G , en $f = \pm B$: c'est ce qu'on appelle le phénomène de Gibbs. Ces sur-oscillations étant dues à la forme elle-même oscillante (en sinus cardinal) de la transformée de Fourier (au sens des suites) \hat{P}_N de P_N la parade classique est de remplacer P_N par une fenêtre de pondération *POND*, également paire pour conserver la linéarité de la phase, mais sans discontinuité sur les bords. Une fenêtre classique est la fenêtre de Hamming, mais il en existe bien d'autres.

La réponse en fréquence du filtre devient alors

$$\hat{H}(f) = \exp(-2\pi i f (N-1)/2) \cdot \text{CONVP}(\text{TFS}(\text{POND}), G)(f) \quad f \in [-1/2, 1/2[$$

ce qui se traduit par une nette atténuation des sur-oscillations au prix d'une coupure en fréquence moins nette en $\pm B$.

2.1.2 Synthèse de filtres RIF par échantillonnage en fréquence

L'idée de cette méthode est de construire une réponse impulsionnelle à laquelle on impose N valeurs de réponse en fréquence :

$$\hat{H}(f_n) = \sum_{k=-(N-1)/2}^{+(N-1)/2} \exp(-2\pi i k f_n) H[k], \quad f_n = \frac{n}{N}, \quad n = -(N-1)/2, \dots, (N-1)/2$$

Pour cela on passe par les étapes suivantes :

- a) définir une suite d'échantillons de la réponse désirée $\hat{H}_D(f_n)$, $f_n = \dots$,
- b) calculer $g_E[k] = \text{FFT}^{-1}(\hat{H}_D)[n]$, $n = \dots$,
- c) rendre le filtre g_E causal,

où \hat{H}_D est une version modifiée de \hat{H} , présentant des transitions moins brutales à hauteur des fréquences de coupure. Ceci est utile car on ne contrôle pas explicitement la réponse en fréquence $\hat{H}(f_n)$ pour des valeurs de f placées entre les f_n . Si on l'applique ainsi sur un gabarit passe-bas rectangulaire on constate la présence d'oscillations dans $\hat{H}(f)$, entre les f_n sur $[-1/2, 1/2[$. C'est pour cela que la méthode proposée en pratique

est souvent de remplacer le gabarit rectangulaire par un gabarit trapèzoïdal introduisant des transitions plus progressives à hauteur des fréquences de coupure désirées.

2.2 Synthèse de filtres ARMA

La structure générale de ces filtres impose à la fonction de transfert d'être de forme rationnelle (en plus d'être stable et causale). Leur synthèse est mathématiquement équivalente, à une constante multiplicative près, à la détermination des pôles et des zéros de cette fonction de transfert. Deux méthodes sont présentées ici. La première, bien qu'heuristique, présente l'avantage d'être très intuitive et de bien faire sentir l'influence des pôles et des zéros sur l'allure de la réponse en fréquence.

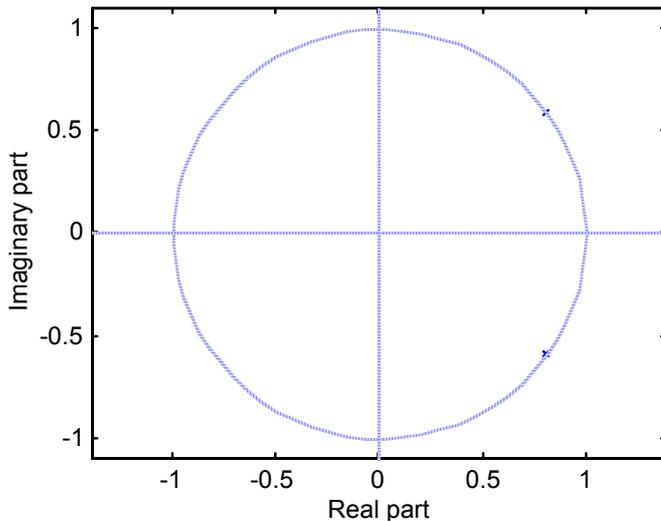
2.2.1 Approche heuristique (à caractère géométrique) par placement des pôles et des zéros

Dans cette méthode on impose des pôles en fonctions d'une ou plusieurs bandes passantes que l'on désire imposer dans la réponse en fréquence du filtre et éventuellement des zéros pour obtenir une bonne atténuation dans les bandes de coupure.

Pour l'expliquer considérons l'exemple de fonction de transfert en z

$$\begin{aligned} \frac{Z_S(z)}{Z_E(z)} = Z_H(z) &= \frac{1}{(z-p)(z-p^*)} = \frac{1}{z^2 - z(p^*+p) + pp^*} && \text{où} \\ &= \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}(p^*+p) + pp^* z^{-2}} \\ & \quad p = \rho e^{i\theta}; \quad \theta = 2\pi f; \end{aligned}$$

La figure ci-dessous montre la position dans le plan complexe des 2 pôles qui sont



évidemment choisis de module inférieur à 1. Pour la fréquence $f = \frac{\theta}{2\pi}$ le point représentatif de $\exp(2\pi if)$ est à distance minimale (égale à $1 - \rho$) du pôle situé dans le demi-plan supérieur. Pour la fréquence négative de même valeur absolue c'est le pôle du demi-plan inférieur qui est proche du point représentatif. Il est alors clair géométriquement que le module de la réponse en fréquence :

$$|Z_H(e^{2\pi if})| = \left| \frac{1}{(e^{2\pi if} - p)(e^{2\pi if} - p^*)} \right|, f \in [-1/2, 1/2[$$

passera par un maximum approximativement égal à $\frac{1}{(1-\rho)2\rho \sin(\theta)}$ ($2\rho \sin(\theta)$ étant approximativement la distance $|e^{2\pi if\theta} - \rho e^{-2\pi if\theta}|$) pour ces 2 valeurs de fréquence et qu'il passera par une valeur minimale pour $f = \pm 1/2$ qui amène le point représentatif en -1 dans le plan complexe.

L'équation récurrente de filtrage obtenue à partir de la transformée en Z est alors la suivante :

$$S[n] = (p^* + p)S[n-1] - pp^* S[n-2] + E[n-2], \quad pp^* = \rho^2, \quad p + p^* = 2\rho \cos(\theta)$$

2.2.2 Utilisation de la transformée bilinéaire

Cette méthode passe par l'introduction d'une fonction de transfert analogique que l'on synthétise par choix de pôles et de zéros dans le plan complexe pour approcher un gabarit fréquentiel analogique G_A sur R déduit du gabarit fréquentiel numérique désiré G_N sur $[-1/2, 1/2[$. La correspondance entre les deux gabarits se fait au moyen des transformations suivantes, l'une étant réciproque de l'autre :

$$TR^{-1} : p \rightarrow z = \frac{p+1}{1-p} \quad TR : z \rightarrow p = \frac{z-1}{z+1} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

TR transforme le cercle unité (moins le point -1) $z = e^{2\pi i f_N}$, $f_N \in]-1/2, 1/2[$
en la droite verticale $p = 2\pi i f_A$, $f_A \in R$.

ce qui implique une correspondance biunivoque entre les fréquences 'numériques' sur $[-1/2, 1/2[$ et les fréquences 'analogiques' sur R :

$$\omega_A = \tan\left(\frac{\omega_N}{2}\right) \quad \omega_A = 2\pi f_A, \quad \omega_N = 2\pi f_N = 2 \tan^{-1}(\omega_A)$$

Fondamentalement cette transformation peut être utilisée pour réaliser **un changement de variable** sur f_N dans l'expression de la réponse en fréquence $\hat{H}_N(f_N)$ du filtre numérique pour passer de la fonction $f_N \rightarrow \hat{H}_N(f_N)$ définie sur $[-1/2, 1/2[$ (correspondant au cercle unité dans le plan des Z) à une fonction

$$f_A \rightarrow \hat{H}_N(f_N) = \hat{H}_A(f_A) = \hat{H}_N\left(\frac{1}{2\pi} 2 \tan^{-1}(2\pi f_A)\right) = \hat{H}_N\left(\frac{1}{\pi} \tan^{-1}(2\pi f_A)\right)$$

définie sur la droite réelle des fréquences analogiques (qui correspond à l'axe des y dans le plan complexe de la variable de Laplace p).

Le principe de la synthèse consiste à traduire le gabarit et les diverses contraintes sur la forme de la réponse dans le domaine analogique, à trouver une fonction de transfert en p (Laplace) répondant à ces contraintes 'analogisées', et à 'désanalogiser' cette fonction de transfert pour obtenir une fonction de transfert en z .

Plus précisément, considérons une contraintes de proximité au gabarit sur $\hat{H}_N(f_N)$ du type

$$| \hat{H}_N(f_N) - G_N(f_N) | \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+ \quad \forall f_N \in [a_N, b_N] \subset [-1/2, 1/2]$$

Considérant la bijection (fonction strictement croissante) entre fréquences analogiques et fréquences numériques :

$$f_A = h(f_N) = \frac{1}{2\pi} \tan\left(\frac{\pi f_N}{2}\right) \quad \leftrightarrow \quad f_N = h^{-1}(f_A) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(2\pi f_A)$$

une manière strictement équivalente d'écrire cette contrainte est:

$$| \hat{H}_N(h^{-1}(f_A)) - G_N(h^{-1}(f_A)) | \in [\alpha, \beta] \quad \forall f_A \in [h(a_N), h(b_N)] \subset \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow | \hat{H}_A(f_A) - G_A(f_A) | \in [\alpha, \beta] \quad \forall f_A \in [h(a_N), h(b_N)] \subset \mathbb{R}$$

On remarquera que si le gabarit numérique G est de forme rectangulaire (fonction porte périodique pour un passe-bas idéal) le gabarit analogique est lui-même une fonction porte. Le respect de contraintes dans le domaine analogique correspond ainsi à un problème de synthèse de filtre analogique qui aboutit à une fonction de transfert $L_{H_A}(p)$. On sait alors que la fonction de transfert en z , $Z_{H_N}(z) = L_{H_A}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$, qui coïncide avec $\hat{H}_N(f_N)$ sur le cercle unité ($z = \exp(2\pi f_N)$), respectera toute contrainte de départ concernant la réponse en fréquence numérique correspondante.

Exemple :

Supposons que l'on veuille réaliser un filtre numérique présentant une et une seule fréquence de résonance en $\omega_{0,N} \in [-\pi, \pi]$. On peut alors introduire un filtre analogique passe bande de fonction de transfert de Laplace:

$$L_{H_A}(p) = \frac{p}{1 + 2 \frac{\xi}{\omega_{0,A}} p + \frac{p^2}{\omega_{0,A}^2}}$$

dont on sait qu'il présente lui-même une fréquence de résonance analogique. Pour que cette dernière soit l'image (dans le domaine des fréquences analogiques) de $\omega_{0,N} \in [-\pi, \pi[$ on calcule $\omega_{0,A} = \tan\left(\frac{\omega_{0,N}}{2}\right)$. Si par exemple la fréquence de résonance numérique désirée est $\omega_{0,N} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\pi}$ ceci mène à $\omega_{0,A} = \tan\left(\frac{1}{16\pi}\right)$. Le choix de ξ peut se faire alors en fonction d'une largeur de bande désirée à -3 dB dans le domaine numérique que l'on peut convertir par la formule de passage $\omega_N \rightarrow \omega_A$ en une largeur de bande à -3 dB dans le domaine analogique, cette dernière (conjointement avec $\omega_{0,A}$) imposant alors ξ (par les relations connues pour une fonction de transfert passe-bande d'ordre deux).

Avec la transformation $p \rightarrow z = \frac{p+1}{1-p}$ on aboutit alors à la fonction de transfert en z :

$$Z_{H_N}(z) = \frac{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{1 + 2 \frac{\xi}{\omega_{0,A}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2} \frac{1}{\omega_{0,A}^2}}$$

soit $Z_{H_z}(z) = \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1+z^{-1})^2 + \alpha(1-z^{-1})(1+z^{-1}) + \beta(1-z^{-1})^2}$ avec $\alpha = \frac{2\xi}{\omega_{0,A}}$ et $\beta = \left(\frac{1}{\omega_{0,A}}\right)^2$

ce qui donne en simplifiant $Z_{H_z}(z) = \frac{1+z^{-2}}{z^{-2}(1-\alpha+\beta) + 2z^{-1}(1-\beta) + 1 + \alpha + \beta}$

et la relation temporelle récurrente :

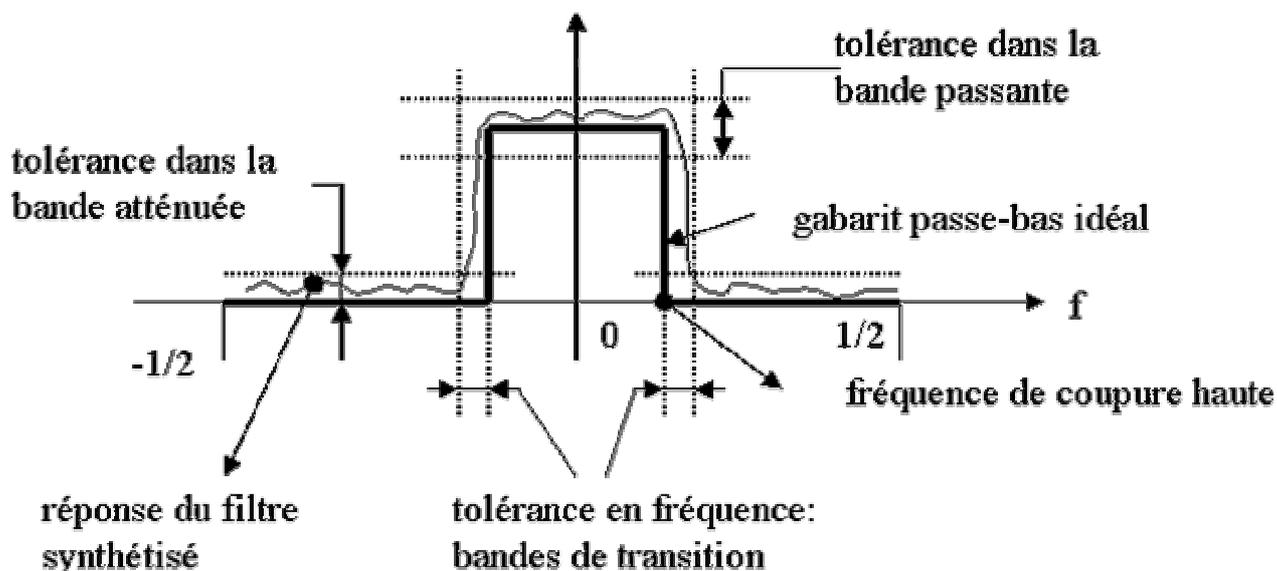
$$(1 + \alpha + \beta)S[n] = -(1 - \alpha + \beta)S[n - 2] - 2(1 - \beta)S[n - 1] + E[n] + E[n - 2]$$

Cette dernière est de la forme d'un filtre ARMA avec $N=2$ et $M=2$:

$$S[n] = a_2 S[n - 2] + a_1 S[n - 1] + E[n] - 2E[n - 1] + E[n - 2].$$

2.2.2 Indications sur d'autres méthodes

Il existe d'autres méthodes disponibles sous forme logicielle (par exemple en matlab) permettant une synthèse performante. Généralement l'utilisateur doit spécifier, au delà d'un gabarit précis, des fourchettes de tolérance, en amplitude et en fréquence, comme indiqué dans la figure ci dessous.



Le logiciel, par exemple pour une requête sous forme ARMA, déterminera l'ordre de la partie AR et celui de la partie MA, et calculera des valeurs optimales pour les coefficients $a_k, k=1..N$ et $b_k, k=0..M$ de telles manière que la différence entre la réponse synthétisée et la réponse idéale spécifiée par le gabarit:

$$\hat{H}(f_N) - G(f_N) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-2\pi i f_N k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k e^{-2\pi i f_N k}} - G(f), f \in [-1/2, 1/2[$$

respecte les fourchettes de tolérance. Les ordres pourront être d'autant plus élevés que ces fourchettes seront étroites. La notion d'optimalité peut varier suivant le type de méthode. Certaines méthodes mettent l'accent sur l'écart maximum de la réponse synthétisée relativement au gabarit en autorisant de nombreuses oscillations (Thebychev) dans la forme de la réponse en amplitude. D'autres garantiront une forme suffisamment lisse de cette réponse (Butterworth). Citons également les filtres de type elliptique et de type Bessel.

Université de Rennes, MI Electronique
Introduction au filtrage numérique (JJ Bellanger)

Même si on ne dispose pas de matlab signal processing tool box il est possible de trouver des renseignements sur le site mathworks:

https://tagteambserver.mathworks.com/ttserverroot/Download/20574_9860v01_QZ_.pdf