

Les nombres complexes

Formation IMAC, Année 2003-2004

Table des matières

1	Introduction	2
2	Construction de $\mathbb{C}$	2
3	Conjugué et module d'un nombre complexe	3
4	Interprétation géométrique des nombres complexes	4
5	Exponentielle complexe	5
6	Formules d'Euler	5
7	Les équations de degré 2	5

1 Introduction

On sait que certaines équations de degré 2 à coefficients réels n'admettent pas de solution réelle. On se propose de chercher un ensemble muni d'opérations permettant les calculs habituels, noté $\mathbb{C}$, contenant les solutions de toute équation de degré 2 à coefficients réels;

- puisque tout réel α est solution d'au moins une équation de degré 2, $\mathbb{C}$ doit contenir $\mathbb{R}$;
- la plus simple des équations de degré 2 n'admettant pas de solution réelle est l'équation $z^2 + 1 = 0$ soit $z^2 = -1$. $\mathbb{C}$ doit donc contenir un élément¹ noté j (également noté i);
- afin de pouvoir mener les calculs, on choisit d'utiliser les opérations habituelles dans $\mathbb{R}$, en considérant j comme un élément à part.

On décide alors de prendre pour $\mathbb{C}$ l'ensemble $\{x + jy \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ (en bijection avec $\mathbb{R}^2$), qu'il nous reste à munir d'opérations compatibles d'une part avec les opérations habituelles dans $\mathbb{R}$ (considérant j comme un élément à part) et d'autre part avec l'égalité $j^2 = -1$. Soit $z = x + jy$ et $z' = x' + jy'$ dans $\mathbb{C}$ avec x, y, x', y' réels :

- la somme de z et z' est donnée par :

$$(x + jy) + (x' + jy') = (x + x') + j(y + y')$$

soit en termes de couples dans $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

- le produit de z et z' est donné par :

$$\begin{aligned} (x + jy)(x' + jy') &= (xx') + j(xy') + j(yx') + j(y)j(y') \\ &= (xx') + j(xy' + yx') + j^2(yy') \\ &= (xx' - yy') + j(xy' + yx') \end{aligned}$$

soit en termes de couples dans $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$$

2 Construction de $\mathbb{C}$

Définition 1 *L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois suivantes :*

- *l'addition : $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$*

1. En fait, ce n'est pas dans la résolution de l'équation $z^2 + 1 = 0$ que j est intervenu pour la première fois. C'est à l'occasion de la résolution d'une équation de degré 3 que des algébristes italiens de la Renaissance – Cardan (1501-1576) puis Bombelli (1526-1572) – s'enhardissent à considérer des racines carrées de nombres négatifs et à établir des règles de calcul avec ces nouveaux objets.

– la multiplication $(a,b)(a',b') = (aa' - bb', ab' + ba')$

Dès lors l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de l'addition et de la multiplication est appelé corps des nombre complexes.

Proposition 1 *Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = a + jb$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Cette forme est appelée la **forme algébrique** ou **cartésienne** de z . Le réel a est la **partie réelle** de z et se note $\mathcal{Re}(z)$; b est la **partie imaginaire** de z et se note $\mathcal{Im}(z)$;*

Remarquons que z est réel si et seulement si $\mathcal{Im}(z) = 0$, alors que z est appelé imaginaire pur lorsque $\mathcal{Re}(z) = 0$.

3 Conjugué et module d'un nombre complexe

Définition 2 *Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z = a + jb$. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $z^* = a - jb$ (noté également $\bar{z}$).*

On a alors les propriétés suivantes :

1. $(z^*)^* = z$;
2. $z + z^* = 2\mathcal{Re}(z)$ et $z - z^* = 2j\mathcal{Im}(z)$;
3. $zz^* = z^*z = a^2 + b^2$.
4. $(z + z')^* = z^* + z'^*$;
5. $(zz')^* = z^*z'^*$;
6. si $z' \neq 0$ alors $\left(\frac{z}{z'}\right)^* = \frac{z^*}{z'^*}$;

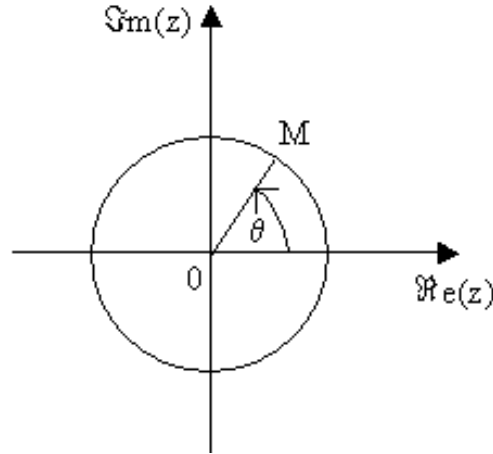
Remarquons que z est réel si et seulement si $z = z^*$, alors que z est appelé imaginaire pur si et seulement si $z = -z^*$.

Définition 3 *Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z = a + jb$. On appelle **module** de z le nombre réel positif ou nul $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

On a alors les propriétés suivantes :

1. $|z| = |z^*|$ et $|z|^2 = zz^*$;
2. $|zz'| = |z||z'|$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$;
3. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire) avec égalité si et seulement si $z = 0$ ou $z' = tz$ ($t \in \mathbb{R}_+$).

Notons qu'il est impossible d'ordonner les éléments de $\mathbb{C}$ contrairement aux éléments de $\mathbb{R}$: les symboles $\leq$ et $\geq$ ne peuvent donc pas être utilisés pour des nombres complexes.



4 Interprétation géométrique des nombres complexes

Munissant le plan d'un repère orthonormé, on associe alors au nombre complexe $z = a + j b$ le point M de coordonnées (a, b) . On dit que M est l'image de z et qu'inversement, z est l'afixe de M . En outre, pour tout nombre complexe z non nul, de module $|z| = r$, il existe un réel θ satisfaisant la relation $z = r (\cos(\theta) + j \sin(\theta))$. De ce fait, z est entièrement déterminé par la donnée de r et θ .

Définition 4 Le nombre réel θ , défini modulo 2π , est appelé **argument** de z , et noté $\arg(z)$. La forme $z = r (\cos(\theta) + j \sin(\theta))$ est la **forme trigonométrique** de z .

Notons que z est un nombre réel si et seulement si $\arg(z) = 0 [\pi]$ et z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2} [\pi]$. Remarquons également l'équivalence entre les trois propriétés suivantes, lorsque z et z' sont deux nombres complexes non nuls :

1. $z = z'$;
2. $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$;
3. $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z') [2\pi]$.

D'autre part, nous avons les propriétés suivantes, où z est un nombre complexe non nul :

1. $\arg(z^*) = -\arg(z) [2\pi]$;
2. $\arg(zz^*) = 0 [2\pi]$;
3. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$;
4. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$.

2. Rappelons la notation classique $\theta = \frac{\pi}{2} [2\pi] = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) pour indiquer que l'angle θ est égal à $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π .

Nous terminerons cette section par la formule dite de Moivre :

Théorème 1 *Formule de Moivre : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$(\cos(\theta) + j \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + j \sin(n\theta).$$

5 Exponentielle complexe

On définit l'exponentielle complexe de module 1, notée $e^{j\theta}$, comme une bijection de $[0, 2\pi[$ sur l'ensemble des nombres complexes de module 1 telle que :

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= \cos(\theta) + j \sin(\theta) \\ e^{j(\theta+\theta')} &= e^{j\theta} e^{j\theta'} \\ e^{jn\theta} &= (e^{j\theta})^n \end{aligned}$$

De manière plus générale, pour tout nombre complexe $z = x + jy$, x et y réels, on définit l'exponentielle complexe $e^z = e^{x+jy}$ de module e^x et d'argument y telle que :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

6 Formules d'Euler

Les formules exponentielles $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$ et $e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j \sin(\theta)$ mènent aux formules d'Euler :

Théorème 2 *Formules d'Euler :*

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \\ \sin(\theta) &= \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \end{aligned}$$

Ces relations sont très utiles notamment dans la linéarisation d'un cosinus ou d'un sinus élevé à une certaine puissance.

7 Les équations de degré 2

En définissant la racine carrée d'un nombre complexe $z = r(\cos(\theta) + j \sin(\theta)) = re^{j\theta}$ par :

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) = \sqrt{r} e^{j\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

on est à présent en mesure de résoudre toute équation de degré 2 à coefficients complexes.

Théorème 3 *On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation :*

$$(*) az^2 + bz + c = 0$$

où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le nombre complexe discriminant de l'équation, et notons δ une racine carrée de Delta, alors :

- si $\Delta = 0$, (*) admet une racine double égale à $-\frac{b}{2a}$;

– si $\Delta \neq 0$, (*) admet deux racines distinctes respectivement égales à $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$.