Correction examen de probabilités L3 Electronique, 13-12-2004

Enoncé:

On lance d'abord une pièce de monnaie et ensuite un dé (l'une comme l'autre étant supposés "honnêtes", non pipés). La VA (variable aléatoire) X prend la valeur 1 si le résultat est "face" pour la pièce et la valeur 2 sinon. La variable Y prend la valeur k quand le dé montre la face numéro k. On introduit la VA $Z = XY$.

1) Pourquoi peut-on admettre, "physiquement", que X et Y sont indépendantes? Calculer $E(Z)$.

2) Quelles sont les valeurs possibles pour Z ? Donner sous forme de tableau la distribution de probabilité de Z.

3) a) Donner sous forme de tableau la distribution de probabilité du couple (X, Z).

b) Calculer les probabilités conditionnelles $P(X = 1 / Z = k)$ pour les valeurs $k = 1,2,5,6$.

c) Utiliser le tableau de a) pour trouver la distribution de probabilité de la VA $Y = Z + X$.

5) Calculer $E(XZ)$.

Réponses:

1)La connaissance du résultat obtenu avec le dé n'influence en rien celui obtenu avec la pièce et réciproquement

X et Y étant indépendantes:

E(Z)=E(XY)=E(X)E(Y)=[(1.1/2)+(2.1/2)].[(1.1/6)+..+(6.1/6)]=(3/2).(21/6)

2) $Z \in \{1, 2, .., 6, 2, 4, .., 12\}$

k	1	2	3	4	5	6	8	10	12
12xP(Z=k)	1	2	1	2	1	2	1	1	1

3) a)Tableau des valeurs P(X=k,Z=m)x12

m→	1	2	3	4	5	6	8	10	12
X=1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
X=2	0	1	0	1	0	1	1	1	1

b) $P(X = 1 / Z = k) = P(X = 1, Z = k) / P(Z = k) =$

1 si k=1, =1/2 si k=2, =1 si k=5, =1/2 si k=6 (ce qui s'interprète facilement..)

c)Tableau des valeurs de Z+X:

l→	1	2	3	4	5	6	8	10	12
X=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X=2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

En utilisant les probabilités du tableau de 3)a) on obtient:

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P(Z+X=m)x12	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1

5)E(XZ)=E(X(XY))=E(X^2 Y)=E(X^2)E(Y) puisque l'indépendance de X et Y entraine celle de X^2 et de Y. Donc E(XZ)=((1.1/2)+(4.1/2)).21/6=(5/2).(21/6)=35/4

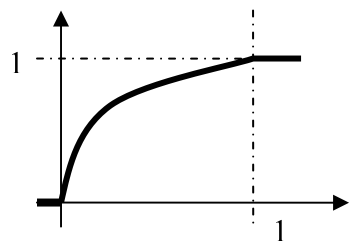
<u>Enoncé:</u>

La VA X est de loi continue et sa fonction de répartition est $F_X(x)=0$ si $x \le 0$, $F_X(x)=x(2-x)$ si $0 \le x \le 1$ et $F_X(x)=1$ sinon.

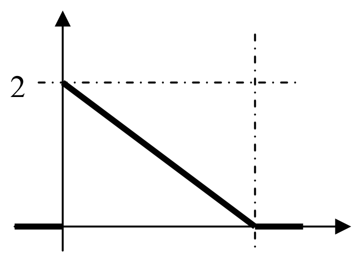
1) Représenter graphiquement $F_X(x), x \in R$ ainsi que la <u>densité de probabilité</u> correspondante $p_X(x), x \in R$. Où peut-on attendre que X prenne ses valeurs?
2) Calculer $P(X > \frac{1}{2} / X > \frac{1}{4})$.
3) Calculer $VAR(X)$.
4) La VA Y est définie par $Y=\sqrt{X}$. Où peut-on attendre que Y prenne ses valeurs? Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition et la densité de probabilité pour Y.

<u>Réponses:</u>

<u>1)</u>



Fonction de répartition



Densité de probabilité

X prend ses valeurs dans l'intervalle [0,1] (avec une probabilité égale à 1)

2)La densité de probabilité pour X est égale à 2(1-x) sur [0,1] (et =0 ailleurs)

et d'autre part on a $P(X > \frac{1}{2} / X > \frac{1}{4}) = P(X > \frac{1}{2}) / P(X > \frac{1}{4})$.

$P(X > \frac{1}{2}) = \int_{1/2}^{1} 2(1-x)dx =$ et $P(X > \frac{1}{2}) = \int_{1/4}^{1} 2(1-x)dx = \dots$

et donc $P(X > \frac{1}{2} / X > \frac{1}{4})$=…

Remarque: on peut aussi faire le calcul avec la fonction de répartition

3) $VAR(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X\ ) = \int_0^1 x\ 2(1-x)dx = A,\quad E(X^2) = \int_0^1 x^2 2(1-x)dx = B$

$VAR(X) = B - A^2 = ...$

4) $Y \in [0,1] \ \Rightarrow\ F_Y(y) = 0$ si $y < 0$ et $F_Y(y) = 1$ si $y > 1$ et reste donc à voir entre 0 et 1.
Pour $y \in]0,1[$ on a:

$F_Y(y) = P(Y < y) = P(\sqrt{X} < y) = P(X < y^2) = F_X(y^2)$

$\Rightarrow F_Y(y) = y^2(2 - y^2)$ sur $]0,1[$

<u>Remarque</u>: sur les bords gauche et droit de l'intervalle $]0,1[$ on tend respectivement vers 0 et 1 et la fonction de répartition de Y est donc continue sur $\mathbb{R}$.
On en déduit la fonction densité de probabilité en dérivant:
$p_Y(y) = F_Y'(y) = 4y\text{-}3y^3$ sur $]0,1[$ et $= 0$ ailleurs (sur $y = 0$ et $y = 1$ on est libre de choisir d'autres valeurs, par exemple 1 et 1, ceci ne changeant pas les calculs de probabilité sur Y qui se font par intégration de p_Y)