UNIVERSITE de RENNES-1 3-09-2004

Licence EEA ,UE4: Probabilités

Durée : 2h

Doc. autorisés : 1 feuille A3 recto-verso notes person. + résumé distribué

I- On considère une VA (variable aléatoire) X dont la fonction de répartition est :

$F_X(x) = 0$ si $x < 0, = x/2$ si $0 \le x \le 1, = \frac{1}{2}$ si $1 < x \le 2$, $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2)$ si $2 < x \le 4, = 1$ si $x > 4$

1) Représenter graphiquement cette fonction de répartition. Correspond-elle à une loi de probabilité discrète ou à une loi continue ? Pourquoi ?

2) Donner les valeurs numériques des probabilités $P(X > 0,5)$ et $P(X < 3)$ et de la probabilité conditionnelle $P(X < 3 / X > 1,5)$.

3) Représenter graphiquement la densité de probabilité pour la VA X et calculer $E(X)$.

II- Soit une VA U de loi uniforme (équirépartie) sur l'intervalle $]0,1] \subset R$. On introduit une 2ème VA définie par $X = f(U) = -\frac{1}{\lambda}\ln(U)$ où λ est un réel positif.

1) Quel est le domaine des valeurs possibles pour les réalisations de X ?

2) Calculer $P(X < x)$ pour $x \ge 0$ et représenter graphiquement la fonction de répartition $F_X(x), x \in R$ pour la VA X.

3) Densité de probabilité et moyenne de X ?

III- On considère 3 VA X, Y, Z indépendantes dans l'ensemble et de lois uniformes sur les intervalles respectifs $[-1/2, 1/2], [-1/2, 1/2], [0,1]$. On forme par ailleurs les 2 VA $U = X + Y$ et $V = YZ$.

1) Rappeler les expressions en fonction de a et b de la moyenne et de la variance d'une VA de loi uniforme sur un intervalle $[a,b] \subset R$. Le calcul n'est pas demandé.

2) Moyennes de X, Y, Z, U, V ?

3) Variances de X, Y, Z, U, V ?

4) Coefficient de corrélation entre U et V ?

Rappel : Si 2 VA X_1, X_2 sont indépendantes, alors quelles que soient les fonctions (mesurables) f et g, les VA $f(X_1)$ et $g(X_2)$ sont également indépendantes et on a donc :

$$E(f(X_1)g(X_2)) = E(f(X_1))E(g(X_2))$$

dans la mesure où les espérances existent.