UNIVERSITE de RENNES-1 28 mai 2004

Licence EEA ,UE4: Probabilités

Durée : 2h

Doc. autorisés : 1 feuille A3 recto-verso notes person. + résumé distribué

I-Le quart d'une population a été vacciné contre la grippe. Au cours d'une épidémie on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. En notant (pour un individu pris au hasard dans la population) V et M les événements « l'individu est vacciné » et «l'individu est malade » ceci se traduit donc par $P(V)=1/4$ et $P(V/M)=1/5$.

i)Montrer que le vaccin a une influence, autrement dit que les événements V et M ne sont pas indépendants.

ii)On a constaté d'autre part que, parmi les personnes vaccinées, une sur douze était malade. Exprimer ce fait par la valeur d'une probabilité conditionnelle et calculer $P(M)$ à partir de cette probabilité conditionnelle et des valeurs $P(V)=1/4$ et $P(V/M)=1/5$.

iii)Montrer la relation $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$.

iii)Déduire de ce qui précède la probabilité pour qu'un individu soit tombé malade sachant qu'il n'était pas vacciné .

II-On considère une porte 'et' en logique TTL disposant de 2 entrées sur lesquelles on présente respectivement les signaux à valeurs (idéales : 0 Volt où 5 Volts en chaque instant) :

$$X(t)=5 \text{ si } t\in[o,T_1] \text{ et } X(t)=0 \text{ sinon}$$

$$Y(t)=5 \text{ si } t\in[o,T_2] \text{ et } X(t)=0 \text{ sinon}$$

i)Les durées des impulsions X et Y étant incertaines on suppose que T_1 et T_2 correspondent à un couples de VA <u>indépendantes</u>, chacune de loi uniforme sur [10ms,20ms]. Quelle est la probabilité pour que l'impulsion de sortie soit de durée inférieure à 14ms ? Même question si on remplace la porte 'et' par une porte 'ou non exclusif' ?

III-Deux V.A. (variables aléatoires) discrètes X et Y <u>indépendantes</u> et, chacune, à valeurs dans $\{0,1\}$, admettent pour distributions de probabilités marginales :

$$p(X=1)=P(X=0)=1/2 \text{ et } p(Y=1)=P(Y=0)=1/2$$

On introduit les 2 VA $U=X+Y$ et $V=|X-Y|$.

i)Donner les lois marginales de U et de V et donner sous forme d'un tableau la loi de probabilité conjointe du couple (U,V). Les VA U et V sont elles indépendantes ?

ii)Montrer que le coefficient de corrélation $\rho_{U,V}$ est égal à zéro.

IV-On considère une VA X admettant la fonction de répartition définie par :

$$x\le -1 \Rightarrow F_X(x)=0, x\ge 2\Rightarrow F_X(x)=1$$

$$-1<x\le 0\Rightarrow F_X(x)=\frac{2}{3}(1+x), 0\le x\le 2\Rightarrow F_X(x)=\frac{2}{3}+\frac{x}{6}$$

i) Représenter graphiquement cette fonction de répartition. Correspond-elle à une loi discrète ou à une loi continue ? Pourquoi ?

ii) Représenter graphiquement la densité de probabilité pour la loi de X puis calculer la moyenne et la variance de X.

iii) On introduit la VA $Y=|X|$. Calculer la moyenne et la variance de Y au moyen de la formule de transfert. Calculer $E(XY)$. Quel est le signe de $\rho_{X,Y}$?