

I- A et B et C sont 3 événements indépendants dans l'ensemble, chacun de probabilité $\in]0,1[$.

i) $A \cap B$ et $B \cap C$ sont-ils indépendants ? Justifier.

ii) Montrer que $A \cup B$ et C sont indépendants.

II- Soit 2 VA indépendantes centrées, chacune à valeurs dans R , notées X et Y et admettant toutes les deux une même variance unité. Exprimer en fonction du réel a le coefficient de corrélation entre les 2 VA $V = aX + Y$ et $U = X - Y$.

III- X est une V.A. de loi admettant une densité égale à $p_X(x) = K(1 - |x/2|)$ sur $[-2,2] \subset R$ et nulle ailleurs (c'est une fonction paire avec un graphe de forme triangulaire).

i) Valeur de K ? Valeur moyenne de X ?

ii) Etudier et représenter graphiquement la fonction de répartition de la V.A. $T = |X|$.

iii) La V.A. Y est définie par $Y = f(X) = \min(|X|, a)$, $a \in R^+$.

a) Représenter graphiquement f et calculer la valeur de a pour que $P(Y = a) = 1/2$.

b) Exprimer et représenter la fonction de répartition de Y pour $0 < a < 1/2$.

c) Quelle est la moyenne de Y (on pourra utiliser la formule de transfert).

IV- Un appareil est mis à l'essai. A chaque essai l'appareil peut tomber en panne avec une probabilité p . Après la première panne l'appareil est réparé. Après la deuxième panne il est déclaré hors de service.

i) Les résultats des différents essais étant assimilés à des événements indépendants dans l'ensemble, quelle est la probabilité pour que l'appareil soit mis hors de service exactement au k -ième essai ?

ii) Valeur moyenne du nombre d'essais N menant à la mise à l'écart de l'appareil ?

Indication : $\sum_{k=2}^{k=\infty} k(k-1)\alpha^k = \frac{2}{(1-\alpha)^3}, |\alpha| < 1$

V- On considère une paire (X, Y) de V.A. de loi conjointe discrète dont la distribution de probabilité est donnée dans le tableau (valeurs de $P(X = i \text{ et } Y = j)$ dans les cases).

X	-1	0	1
Y			
-2	0	0	5/20
-1	1/20	6/20	0
1	5/20	1/20	1/20
2	1/20	0	0

i) Quelle est la loi de probabilité de X (cad $P(X = i), i = -1, 0, 1$) ? Celle de Y ?

ii) Considérer $P(X = -1 \text{ et } Y = 1)$: X et Y sont-elles indépendantes ?

iii) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.

iv) Donner la loi de probabilité de la VA $Z = |X| + Y^2$ et sa valeur moyenne.