

**I.** Une V.A. (variable aléatoire)  $X$  admet une loi discrète décrite dans le tableau ci-dessous :

$X =$	-4	-2	-1	0	3	4
$\text{Pr} =$	0.1	0.15	0.2	0.2	0.15	0.2

- i) Représenter graphiquement la fonction de répartition pour la V.A.  $Y = |X|$ .  
 ii) Calculer la moyenne et la variance pour la V.A.  $Z = X^2$

**II.** Soit 2 VA indépendantes à valeurs dans  $R$ , notées  $X$  et  $Y$ . Exprimer le coefficient de corrélation entre les 2 VA  $V = X + Y$  et  $W = X - Y$  en fonction de  $\sigma_X, \sigma_Y$  (les écarts types des 2 VA  $X$  et  $Y$ ). Que devient ce coefficient de corrélation si on suppose à présent que  $X$  et  $Y$  ne sont plus indépendantes et que leur coefficient de corrélation est  $\alpha$ .

**III.** Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  à valeurs dans  $R$  sont liées par la relation  $Y = \ln(X)$ . On suppose que  $Y$  suit une loi gaussienne centrée de variance  $\sigma^2$ . Exprimer la densité de probabilité de  $X$  en fonction de cette variance.

**IV.** La densité de probabilité d'un couple de V.A.  $(X, Y)$  est définie par  $p_{X,Y}(x, y) = 8xy$  si  $x \in [0, 1]$  et  $0 \leq y \leq x$  (et =0 ailleurs).

- i) Quelles sont les densités de probabilité marginales  $p_X$  et  $p_Y$  ?  
 ii) Quelles sont les valeurs moyennes (espérances mathématiques) de  $X$  et de  $Y$  ?  
 iii) Quelle est la densité conditionnelle de  $Y$  si  $X=x$  ?  $X$  et  $Y$  sont elles indépendantes ?  
 iv) Calculer l'espérance conditionnelle  $E(Y / X = x)$   
 v) Calculer  $E(XY)$  et comparer à  $E(X)E(Y)$ . Les 2 V.A.  $X$  et  $Y$  sont elles décorréliées ?

**V.**  $X$  étant une V.A. de loi admettant une densité uniforme (équirépartie) sur  $[-2, 3] \subset R$  calculer la valeur moyenne et la variance de la V.A.  $Y$  définie par  $Y = \min(X, 2)$  si  $X \geq 0$  et  $Y = \max(X, -1)$  si  $X < 0$ .

