UNIVERSITE DE RENNES I **Lundi 28 mai 2001**

Licence EEA : *examen de probabilités*
Durée : *2h*
Documents autorisés : *1 feuille recto verso de notes personnelles*

Exercice I

Deux V.A. (variables aléatoires) discrètes X et Y indépendantes admettent pour distributions de probabilités marginales :

X=	-4	-1	0	3		Y=	1	2	4	5
Pr=	3/10	2/10	2/10	3/10		Pr=	1/4	1/4	1/4	1/4

On introduit une troisième V.A. Z=│X-Y│.
i)Donner la loi de probabilité de Z (il est conseillé de construire un tableau représentant les valeurs de │X-Y│ en fonction de celles de X et de celles de Y).
ii)Calculer E(Z-X).
iii)Donner sous forme d'un tableau la loi conjointe du couple (X,Z) et en déduire la valeur de E[(X-E(X)).Z].

Exercice II

On présente un signal $X(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \Phi)$ à l'entrée d'un système amplificateur avec saturation qui fournit en sortie $Y(t) = g(X(t)) = \min(K|X(t)|, KA/2) \cdot sgn(X(t))$ où :

- A et K sont deux réels positifs, f_0 est une fréquence fixée,
- Φ est une variable aléatoire de loi équirépartie sur $[0, 2\pi]$,
- $sgn(x) = 1 \; si \; x > 0, = -1 \; si \; x \leq 0$,

(A t arbitrairement fixé $X(t)$ est donc une variable aléatoire).
i)Représenter graphiquement la relation entre $X(t)$ et Φ pour une valeur de t fixée. Donner la fonction de répartition et la densité de probabilité de $X(t)$. Dépendent elles de t ?
ii)Calculer la moyenne et la variance de $X(t)$ en utilisant la formule de transfert.
iii)Tracer le graphe de $g(.)$ (qui une allure très familière pour un électronicien) et représenter graphiquement $Y(t)$ en fonction de t en supposant que $\Phi = 0$.
v) Φ étant à nouveau la V.A. introduite plus haut, étudier et représenter graphiquement la fonction de répartition et la densité de probabilité de $Y(t)$ (la densité comportant des distributions de Dirac) . Quelle est l'espérance mathématique de $Y(t)$?

Indic. : on pourra si on le désire faire les raisonnements et les calculs avec une valeur arbitraire de t (permettant de simplifier les raisonnements) et argumenter ensuite pour expliquer pourquoi les caractéristiques probabilistes de X et Y ne dépendent pas de t.

Rappel : la dérivée de $\arcsin(\alpha x), x \in]-1,+1[$, est $\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}$.

<u>Exercice III</u>

On considère un couple de V.A. (X,Y) tel que :

- X suit une loi équirépartie (uniforme) sur l'intervalle $[-1,+1]$.
- **conditionnellement à** $X = x, x \in [-1,1]$, Y suit une loi équirépartie sur l'intervalle $[x-1, x+1]$ (et ne peut pas prendre de valeurs à l'extérieur de cet intervalle) : $p_{Y/X=x}(y) = I_{[x-1,x+1]}(y)$.

i)Donner l'expression générale de la densité conjointe $p_{X,Y}(x,y)$ et **représenter son support dans** R^2 (ensemble des points (x,y) pour laquelle elle est non nulle).

ii)Donner l'expression de la densité marginale $p_Y(y)$ en fonction des densités $p_X(x)$ et $p_{Y/X=x}(y)$ et mettre ainsi en évidence (pour $p_Y(y)$) un produit de convolution.

iii)Evaluer le produit de convolution de i) pour les fonctions $p_X(x)$ et $p_{Y/X=x}(y)$ données dans l'énoncé (on pourra utiliser un résultat connu dans l'étude des convolutions pour éviter les calculs).

iv)Calculer $E(Y)$ eu utilisant iii).

v)Calculer $E(Y/X=x) = h(x)$ et en déduire, en déconditionnant par rapport à X, l'espérance de Y ; vérifier en comparant avec le calcul de iv).

vi)Evaluer et représenter graphiquement $p_{X/Y=y}(x)$.

vii)Calculer $E(XY)$.