DEVOIR MAISON (Décembre 2010)

Soit {s(t)} le processus aléatoire défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h\left(t - nT\right) \tag{1}$$

où $\{a_n\}$ est une suite de symboles indépendants et identiquement distribués (i.i.d.) prenant leur valeur de manière équiprobable dans l'alphabet {-1,+1,-i,i}, où T est le temps symbole et où h est la fonction porte de support l'intervalle $[0,T[$. L'équation (1) représente le signal modulé en amplitude d'une QPSK. On suppose que le temps symbole T est un multiple de la période d'échantillonnage T_e, c'est-à-dire $T = LT_e$ où L est un entier naturel non nul. On rappelle que l'espérance mathématique d'une fonction *régulière* d'une variable aléatoire est donnée par :

$$\mathrm{E}\left[g\left(X\right)\right] = \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n)\mathrm{P}(X = n) & \text{si } X \text{ est une variable aléatoire discrète} \\ \int_{\mathbb{R}} g(x) p_X\left(x\right) dx & \text{si } X \text{ est une variable aléatoire continue} \\ & \text{de densité de probabilité } p_X \end{cases} \tag{2}$$

Question 1

Calculer l'espérance mathématique et la covariance retardée de la suite $\{a_n\}$ définie par :

$$C_{1,a}^{1}\left[n,p\right] = E\left[a_n a_p^{\ *}\right] - E\left[a_n\right] E\left[a_p\right]^{*} \tag{3}$$

Question 2

Calculer l'espérance mathématique de la QPSK définie en (1), puis sa covariance retardée définie par :

$$C_{1,s}^{1}\left(t,\tau\right) = E\left[s(t)s(t-\tau)^{*}\right] - E\left[s(t)\right] E\left[s(t-\tau)\right]^{*} \tag{4}$$

Question 3

Le signal {s(t)} ayant été préalablement échantillonné à la période T_e, autrement en ne considérant que les instants $t=kT_e$ où k est un entier naturel, le signal {s(t)} est-il stationnaire au sens large à l'ordre 2 pour L=1 ? Même question pour L>1.

Question 4

On suppose à présent L>1. Calculer $E\left[s(t+T)\right]$ et $C_{1,s}^{1}\left(t+T,\tau\right)$. Que peut-on dire du signal {s(t)} ?

Question 5

Soit f une fonction périodique de période P. On sait qu'elle peut alors être décomposée en série de Fourier, cad :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt/P} \tag{5}$$

où les β_n désignent les coefficients de Fourier complexe de f. Récrire la transformée cyclique de f donnée par :

$$\breve{f}(\alpha) = \underset{t\to\alpha}{\mathrm{TC}}\left\{ f(t) \right\} = \lim_{\Delta\to+\infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\alpha t} dt \tag{6}$$

en injectant dans (6) l'équation (5). Puis, sortir le $\sum$ hors de l'intégrale et de la limite. Faire ensuite le changement de variable $u=t/\Delta$. Calculer alors l'intégrale pour tout $\alpha \neq n/P$, sans se préoccuper pour l'instant ni du $\sum$ ni de la limite. Faire apparaître un sinus cardinal (on rappelle que le sinus cardinal est défini par sinc(y) = sin(y)/y pour y non nul et 1 pour y=0). Que vaut la limite de sinc(y) quand y tend vers $+\propto$? En déduire la limite de l'intégrale pour tout $\alpha \neq n/P$ quand Δ tend vers $+\propto$. En déduire la valeur de la transformée cyclique (6) de f pour tout $\alpha \neq n/P$.

Question 6

En notant :

$$\breve{C}_{1,s}^{1}\left(\alpha,\tau\right) = \underset{t\to\alpha}{\mathrm{TC}}\left\{ C_{1,s}^{1}\left(t,\tau\right) \right\} \tag{7}$$

le spectre cyclique du signal {s(t)}, compléter la phrase suivante : « le spectre cyclique du signal {s(t)} décrit par l'équation (1) présente des raies aux fréquences cycliques α multiples de ………… . ». On déduira le résultat du travail effectué à la question précédente. Toutefois on pourra s'aider de la figure 0 présentant le module du spectre cyclique d'une BPSK de temps symbole strictement plus grand que la période d'échantillonnage.

Question 7 (Application)

Soit un satellite recevant deux communications radio, de manière plus précises deux QPSK de temps symboles respectifs T_1 et T_2 strictement plus grand que la période d'échantillonnage, avec $T_1 \neq T_2$. Chaque capteur du satellite récupère, en fait sous l'hypothèse de sources bande étroite, une combinaison linéaire (superposition) des deux QPSK supposées être statistiquement indépendantes. Proposer en quelques lignes (3-4 lignes max) une méthode pour identifier T_1 et T_2.

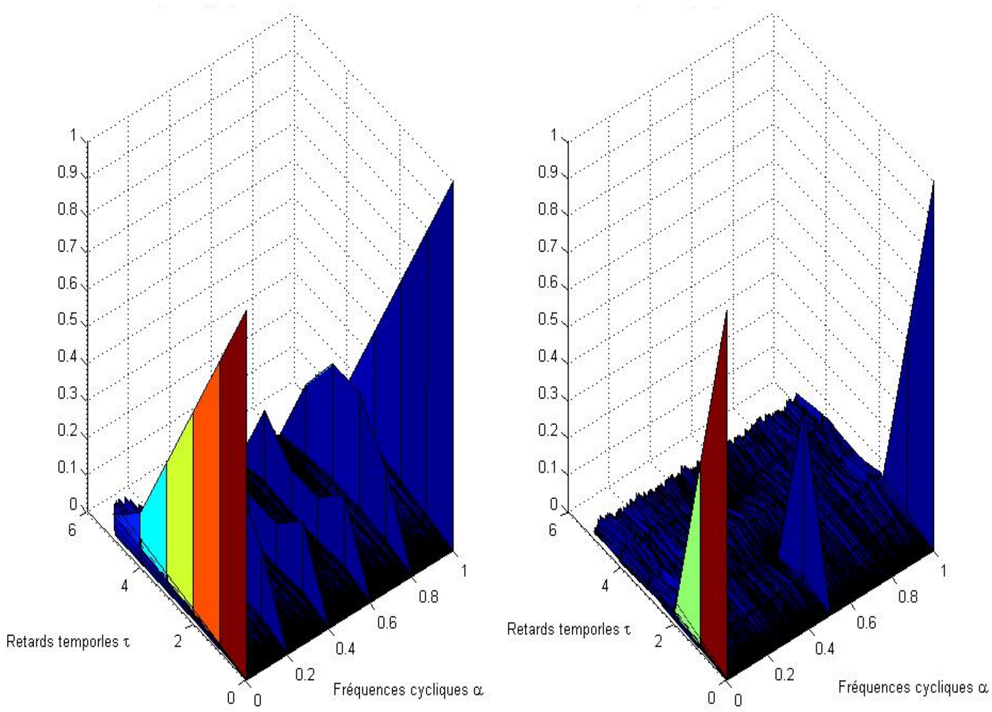

Figure 0 : spectres cycliques de 2 BPSK