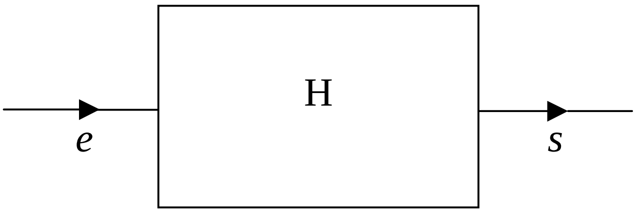
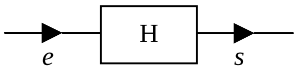
# FILTRAGE DES SIGNAUX



# 1 Généralités

De nombreux systèmes physiques peuvent être schématisés du point de vue de la théorie du signal par le lien entre le signal d'entrée $e$ et le signal de sortie $s$.




Cette correspondance entre l'entrée et la sortie sera notée $s = \mathrm{H}(e)$. Ce type de représentation qui ne prend pas en compte les composantes internes du système est qualifiée de représentation externe. Certains systèmes ont des propriétés particulièrement importantes et simples. Tout système linéaire, continu et invariant (LCI) vérifie les trois propriétés suivantes :

**(P1)** $\mathrm{H}(\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)) = \lambda_1 \mathrm{H}(e_1(t)) + \lambda_2 \mathrm{H}(e_2(t))$ : linéarité
**(P2)** si $\lim_{n\to\infty} \{e_n\} = e$ alors $\lim_{n\to\infty} \{\mathrm{H}(e_n)\} = \mathrm{H}(e)$ : continuité
**(P3)** si $s(t) = \mathrm{H}(e(t))$ alors $s(t-\tau) = \mathrm{H}(e(t-\tau))$ : invariance par translation

Il se trouve que H est une convolution : on a pris l'habitude d'appeler filtre tout système de convolution. Autrement dit, la correspondance $s = \mathrm{H}(e)$ est de la forme $s = \mathrm{H} * e = e * \mathrm{H}$, où $*$ désigne le produit de convolution. Si le filtre est destiné à recevoir essentiellement des signaux continus en temps on parle de filtrage *analogique*. Naturellement un tel filtre peut aussi recevoir des impulsions. Si le filtre est destiné à recevoir uniquement des signaux discrets, on parle alors de filtrage *digital* ou bien *numérique*.

# 2 Filtrage analogique

## 2.1 Dirac

Les Diracs sont utiles pour faire le lien entre les fonctions continues et les suites discrètes. Ils interviennent grandement en traitement du signal et leur maniement est justifiée par la théorie des distributions. Un Dirac $\delta$ a un support réduit à $t = 0$ et associe à toute fonction continue $\phi$ sa valeur en $t = 0$,

**(E1)** $\int \phi(t)\, \delta(t)\, \mathrm{d}t = \phi(0)$

Un Dirac n'est pas une fonction puisqu'il est nul pour $t \neq 0$ bien que son « intégrale » soit égale à 1. D'ailleurs, l'intégrale (E1) est juste une notation symbolique signifiant qu'appliquer $\delta$ à $\phi$ nous donne $\phi(0)$. Notons au passage que $\delta$ appartient à l'ensemble des distributions qui ne sera pas décrit ici, si ce n'est qu'au travers de $\delta$. Ajoutons que « l'intégrale » symbolique employant $\delta$ est une notation très utile dans la mesure où elle possède les mêmes propriétés qu'une intégrale classique, incluant changements de variables et intégration par partie. Un Dirac translaté de $\tau$, $\delta(t-\tau)$, a une masse concentrée en $\tau$, associant ainsi à toute fonction continue $\phi$ sa valeur en $t = \tau$,

**(E2)** $\int \phi(t)\, \delta(t-\tau)\, \mathrm{d}t = \phi(\tau)$

En outre, comme $\delta(t-\tau)$ est nul excepté pour $t = \tau$, nous avons $\phi(t)\, \delta(t-\tau) = \phi(\tau)\, \delta(t-\tau)$. Pour terminer, citons la formule de Poisson, égalité prise au sens des distributions,

**(E3)** $T \sum_n \exp\{-\mathrm{j}2\pi nTf) = 2\pi \sum_k \delta(f - k/T)$

***rem*** : par convention on appelle *fréquence* la variable $f$ et *pulsation* la variable $\omega$ vérifiant $\omega = 2\pi f$.

**Exercice1** : on appelle peigne de Dirac la distribution Ш $= \sum_n \delta(t-nT)$. Déduire de ce qui précède que la transformée de Fourier au sens des distributions d'un peigne de Dirac reste un peigne de Dirac. On donnera l'expression exacte de cette transformée.

## 2.2 Réponse impulsionnelle

Nous définissons la *réponse impulsionnelle* $h$ d'un filtre H LCI comme la sortie correspondant à l'entrée $e = \delta$, autrement dit $\mathrm{H}(\delta) = h$. La réponse impulsionnelle caractérise parfaitement le système, et dans le cas d'un filtre analogique, est le plus souvent une fonction de $L^1(\mathrm{IR})$ ou bien de $L^2(\mathrm{IR})$, c'est ce que nous supposerons ici. Si de plus, $e$ est une fonction de $L^1(\mathrm{IR})$ ou de $L^2(\mathrm{IR})$, nous obtenons comme expression de la sortie $s = \mathrm{H}(e)$ :

**(E4)** $s(t) = \mathrm{H}(e(t)) = \int e(u)\, h(t-u)\, \mathrm{d}u = \int h(u)\, e(t-u)\, \mathrm{d}u = h(t) * e(t)$

**Exercice2** : Démontrer que la sortie $\mathrm{H}(e) = h * e$ du système LCI s'écrit bien sous la forme intégrale (E4). S'aider de la relation (E2), utiliser également les propriétés du système LCI.

En pratique, on est souvent mis en présence d'un système dont on ne connaît pas en détail les composants, seule importe la fonction de ce système, c'est à dire la relation entre l'entrée et la sortie. L'identification du système est donc l'opération qui permet de caractériser cette relation, c'est-à-dire dans le cadre d'un filtre LCI, déterminer la fonction $h$.

Le plus simple en théorie est de mettre à l'entrée du système une impulsion et de recueillir à la sortie la fonction $h$, il n'est cependant pas toujours facile de réaliser une impulsion proche du Dirac.

**Exercice3** : Déterminer la valeur propre de H associée au vecteur propre $\exp(\mathrm{j}2\pi ft)$. En déduire une autre méthode d'identification de la fonction $h$.

## 2.3 Causalité, stabilité

### 2.3.1 *causalité*

Un filtre est dit *causal* si et seulement si à une entrée $e$ nulle pour $t < 0$ correspond une sortie $s = \mathrm{H}(e)$ nulle pour $t < 0$, autrement dit si et seulement si $h(t)$ est nulle pour tout $t < 0$. Une telle réponse impulsionnelle $h$ est dite causale.

### 2.3.2 *stabilité*

Un filtre est *stable* si pour toute entrée $e$ bornée, la sortie $s = \mathrm{H}(e)$ est elle aussi bornée.

**Exercice4** : Déduire une condition suffisante de stabilité impliquant la fonction $h$. Il s'avère que cette condition est en outre nécessaire.

On dit souvent qu'un filtre causal et stable est *réalisable*.

## 2.4 Gain complexe, fonction de transfert

### 2.4.1 *Gain complexe*

On appelle *gain complexe* du filtre la transformée de Fourier $\mathrm{TF}\{h\}(f)$ de la réponse impulsionnelle $h$, $|\mathrm{TF}\{h\}(\mathrm{f})|$ s'appelle le *gain en amplitude* et $\arg\{\mathrm{TF}\{h\}(\mathrm{f})\}$ le *déphasage*. Le gain complexe pour l'ensemble des fréquences $f$ caractérise également le filtre, on parle de représentation dans le domaine fréquentiel par opposition au domaine temporel. Ce passage dans le domaine fréquentiel a pour conséquence de transformer le produit de convolution en un produit classique, c'est le théorème de Plancherel :

**(E5)** $\mathrm{TF}\{\mathrm{H}(e(t))\}(f) = \mathrm{TF}\{h(t) * e(t)\}(f) = \mathrm{TF}\{h(t)\}(f)\ \mathrm{TF}\{e(t)\}(f)$

Par ailleurs, la représentation fréquentielle permet d'observer l'effet du filtre sur l'entrée. Ainsi, en définissant la *bande passante* ($\Delta f$) d'un filtre analogique comme l'intervalle $[f_1, f_2]$ dans lequel la quantité $20 \log |\mathrm{TF}\{h\}(f)|$ reste supérieur ou égal à une valeur de référence (par exemple –3dB), on distingue les filtres *passe bas* ($\Delta f = [0, f_1]$), les filtres *passe haut* ($\Delta f = [f_2, +\infty]$), les filtres *passe bande* ($\Delta f = [f_1, f_2]$) et les filtres *coupe bande* ($\Delta f = [0, f_1] \cup [f_2, +\infty]$). Les notations précédentes insinuent que le filtre considéré est réel, son gain complexe est donc symétrique par rapport à l'axe des imaginaires purs : on ne regarde alors généralement que l'intervalle de fréquences $[0, +\infty[$, la représentation sur l'autre moitié d'intervalle s'obtenant facilement par symétrie axiale.

**Exercice5** : Quel est l'effet du filtre dont le gain complexe vérifie $\mathrm{TF}\{h\}(f) = 1\mathrm{I}_{\{-\mathrm{T},\mathrm{T}\}}$. Calculer la réponse impulsionnelle $h$ correspondante.

Citons pour terminer la formule des interférences, faisant intervenir les densités spectrales de puissance (DSP) de l'entrée $e$ et de la sortie $s$ :

**(E6)** $\mathrm{TF}\{\gamma_s(\tau)\}(f) = |\mathrm{TF}\{h(t)\}(f)|^2\, \mathrm{TF}\{\gamma_e(\tau)\}(f)$

où $\gamma_y(\tau)$ est l'autocovariance temporelle du signal $y(t)$. A noter que la définition de $\gamma_y(\tau)$ varie selon que $y(t)$ est déterministe ou non, si le signal est stochastique, il sera supposé stationnaire au sens large.

### 2.4.2 *Fonction de transfert, stabilité*

On appelle *fonction de transfert* du filtre H la transformée de Laplace monolatérale de la fonction $h$, elle se définit ainsi :

**(E7)** $\mathrm{TL}\{h\}(p) = \int h(t) \exp(-pt)\, \mathrm{d}t$ en intégrant sur $[0,+\infty[$

On a alors le théorème de Borel, non sans rappeler celui de Plancherel pour la transformée de Fourier, en supposant que les fonctions $h(t)$ et $e(t)$ sont nulles pour $t < 0$ :

**(E8)** $\mathrm{TL}\{\mathrm{H}(e(t))\}(p) = \mathrm{TL}\{h(t) * e(t)\}(p) = \mathrm{TL}\{h(t)\}(p)\, \mathrm{TL}\{e(t)\}(p)$

La transformée de Laplace a plusieurs utilités, elle sert principalement à étudier les propriétés asymptotiques et de stabilité des filtres analogiques, notamment quand ces derniers sont causaux. Par ailleurs, elle permet par passage à la limite sur l'abscisse de convergence, de calculer les transformées de Fourier qui ne sont pas accessibles directement.

Revenons au problème de stabilité d'un filtre analogique : lorsqu'on a accès à sa fonction de transfert en $p$, le système est dit *stable* si cette dernière possède tous ses pôles dans l'ensemble des réels strictement négatifs.

# 3 Filtrage numérique

Soient $e(n) = e(t)Ш$ le signal numérique d'entrée où $T$ est la période d'échantillonnage et $s(n)$ la sortie du filtre. Le système dit numérique, est également caractérisé par la réponse impulsionnelle $\mathrm{H}(\delta) = h$ et vérifie

**(E9)** $s(n) = \mathrm{H}(e(n)) = \sum_p h(p)\, e(n-p) = \sum_p h(n-p)\, e(p) = h(n) * e(n)$

Cette formule est parfois appelée formule de « convolution discrète ».

## 3.1 Transformée en z et fonction de transfert

Soit $y(n)$, $n$ appartenant à l'ensemble des entiers relatifs, une suite, on lui associe de façon unique la fonction $\mathrm{TZ}\{y(n)\}(z) = \sum_n y(n)\, z^{-n}$, définie dans le plan complexe $C$. On démontre qu'une telle série converge pour $0 \le R_1 < |\, z \,| < R_2 \le +\infty$. La fonction de transfert du filtre H s'écrit alors $\mathrm{TZ}\{h(n)\}(z) = \sum_n h(n)\, z^{-n}$. Elle permet l'étude des propriétés asymptotiques et de stabilité du système.

Par ailleurs, on retrouve le résultat du théorème de Borel dans le cadre de la transformée en $z$ :

**(E10)** $\mathrm{TZ}\{s(n)\}(z) = \mathrm{TZ}\{h(n)\}(z)\, \mathrm{TZ}\{e(n)\}(z)$

## 3.2 Causalité, stabilité

Un signal $y$ est causal si et seulement si $\mathrm{TZ}\{y(n)\}(z)$ converge pour $|\, z \,| > R_1 \ge 0$. Il est anti-causal si $\mathrm{TZ}\{y(n)\}(z)$ converge pour $|\, z \,| < R_2 \le +\infty$. Quant au filtre, il est causal si et seulement si $h(n)$ s'annule pour tout $n < 0$, donc si $\mathrm{TZ}\{h(n)\}(z)$ converge pour $|\, z \,| > R_1 \ge 0$.

Notons que si un système H est causal, ainsi que son entrée $e$, alors on a $\mathrm{H}(e(n)) = \sum_{p=0}^{n} h(p)\, e(n-p)$. On démontre qu'il est stable si et seulement si $\sum_{n\ge 0} |\, h(n) \,| < +\infty$.

Rajoutons que la condition de stabilité portant sur la fonction transfert en $z$ d'un système causal est que tous ses pôles complexes soient de module strictement inférieurs à 1, c'est-à-dire qu'ils se trouvent à l'intérieur du cercle unité.

**<u>Exercice6</u>** : Un filtre récursif d'ordre 1 vérifie $s(n) - \alpha\, s(n-1) = \beta\, e(n)$. En utilisant le théorème du retard, déterminer la fonction de transfert du système. En supposant le système causal, pour quelle valeur de $\alpha$, est-il stable ?