

XIV - Séries numériques :

1. Généralités :

Déf 1: soit $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. On appelle $S_p = \sum_{n=0}^p U_n$ la somme partielle d'indice p de la série de terme général U_n .

Déf 2: On dit que la série de terme général U_n est convergente si la suite de ses sommes partielles est convergente.

Dans ce cas $S = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p$ s'appelle la somme de la série et on écrit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$. On dit aussi que $\sum U_n$ converge. Lorsqu'une série n'est pas convergente on dit qu'elle diverge.

Prop 1: (i) modifier un nombre fini de termes d'une série n'en altère pas la nature.

(ii) soient $\sum U_n$, $\sum V_n$ et $\sum W_n$ trois séries telles que $W_n = U_n + V_n$. Si deux d'entre elles convergent alors la troisième converge également et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n + \sum_{n=0}^{+\infty} V_n$.

(iii) si $\sum U_n$ converge, alors $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
(démonstration : $U_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$).

Prop 2 : (groupement de termes) soit $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Soit ~~une série de terme général~~ U_n . Posons :

$$\begin{cases} V_0 = U_0 + U_1 + \dots + U_{\gamma(0)} \\ \forall k \geq 1, V_k = U_{1+\gamma(k-1)} + U_{2+\gamma(k-1)} + \dots + U_{\gamma(k)} \end{cases}$$

On dit que la série $\sum V_n$ est obtenue à partir de la série de terme général U_n par groupement de termes. On a :

- (i) $\sum U_n \text{ CV} \Rightarrow \sum V_k \text{ CV}$ et $\sum_0^{+\infty} U_n = \sum_0^{+\infty} V_k$.
- (ii) $\sum V_k \text{ CV}$ et $|U_{1+\gamma(k-1)}| + \dots + |U_{\gamma(k)}| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow \sum U_n \text{ CV}$.
- (iii) $U_n \geq 0$ et $\sum V_k \text{ CV} \Rightarrow \sum U_n \text{ CV}$.
- (iv) $U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, $(\gamma(k+1) - \gamma(k))_{k \in \mathbb{N}}$ ~~est~~ majorée et $\sum V_k \text{ CV} \Rightarrow \sum U_n \text{ CV}$.

2 - Séries à termes positifs ou nuls :

a) Généralités :

- $U_n \geq 0 \Rightarrow (S_n)_n$ est croissante, par conséquent soit (S_n) est majorée et donc converge, soit elle n'est pas majorée et donc diverge.

Prop 3 : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$. $\sum U_n \text{ CV}$ ssi $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathbb{N}, S_p \leq M$.

Prop 4 : Soit $0 \leq U_n \leq V_n$. $\sum V_n \text{ CV} \Rightarrow \sum U_n \text{ CV}$.
 $\sum U_n \text{ DIV} \Rightarrow \sum V_n \text{ DIV}$.

Prop. 5: Soient $U_n \geq 0$, $V_n \geq 0$ et $U_n \sim V_n$ $\Rightarrow \sum U_n$ et $\sum V_n$ sont de même nature.

b) Permutation de l'ordre des termes:

Prop. 6: Soit $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection et γ^{-1} la bijection réciproque. Soient U_n et V_n deux suites de nombres réels

t.q. $V_n = U_{\gamma(n)}$ et $U_n = V_{\gamma^{-1}(n)}$. On dit que la série de terme général V_k s'obtient à partir de la série (U_n) en permutant l'ordre des termes (par la bijection γ).

$\rightarrow$ si $U_n \geq 0$ les séries $\sum U_n$ et $\sum V_k$ sont de même nature. Lorsqu'elles sont convergentes elles sont égales.

c) Comparaison avec une intégrale:

Thm 1: soit $f: [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante positive; pour $n \geq n_0$, on pose $U_n = f(n)$.

Alors la série $\sum_{n \geq n_0} U_n$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) \cdot dt$ ont même nature.

Exercice n° 1: étudier la série de terme général

$$U_n = \frac{1}{n (\log(n))^a} \quad \text{pour } n \geq 2 \text{ et selon les}$$

valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ étudier la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} [\log(x)]^{-a} \cdot dx$

$\rightarrow$ Faire le chgt de variable $t = \log(x)$

$\rightarrow$ CV de l'intégrale ssi $a > 1$, idem pour la série.

d) Méthodes pratiques :

- ds les cas un peu compliqués, chercher à majorer (respectivement minorer) U_n par le terme général d'une série convergente (respectivement divergente) si on veut montrer la convergence (respectivement la divergence) de $\sum U_n$;
- on peut aussi chercher à trouver un équivalent simple de U_n notamment quand U_n semble avoir un comportement en puissance de n ;
- Test d'Alembert: si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l < 1$ alors $\sum U_n$ converge.
- Test de Cauchy: si $\sqrt[n]{U_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l < 1$ alors $\sum U_n$ converge.

Exercice n°2 : Montrer que $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge pour tout $a \geq 0$.

$$\leadsto \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Rem 1 : • si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ alors indétermination ;

• par contre, si $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ pour $n \geq n_0$, alors la série diverge car le terme général ne tend pas vers 0.

1) Majoration du reste :

Si U_n est une série convergente (général) on appelle reste d'ordre n , $R_p = \sum_{p+1}^{+\infty} U_n$ de sorte que $S = \sum_{0}^{+\infty} U_n = S_p + R_p$

Si, on veut calculer une valeur approchée de S en ne calculant qu'un nombre fini de termes, il est important d'avoir une majoration du reste. Par exemple :

- série géométrique R_p : $R_p = \sum_{p+1}^{+\infty} a^n = a^{p+1} \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{a^{p+1}}{1-a}$

- si $\frac{U_{p+1}}{U_p} \leq l < 1$ pour $p \geq n_0$ alors pour $p \geq n_0$ et pour $n \geq 0$, on a :

$$U_{p+1+n} \leq U_{p+1} l^n \quad \text{et} \quad R_p \leq \frac{1}{1-l} \cdot U_{p+1}$$

- comparaison ~~avec~~ avec une intégrale, en prenant les hypothèses du thm 1, on a :

$$R_p = \sum_{p+1}^{+\infty} U_n \leq \int_p^{+\infty} f(t) \cdot dt. \quad (U_n = f(n)).$$

3. Séries absolument convergentes :

Déf 3 : on dit que la série de terme général U_n est absolument convergente si la série de terme général $|U_n| \geq 0$ est convergente.

Prop. 7 : une série absolument convergente est convergente.

Thm 2 : (produit de 2 séries abs. cv) soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes : on pose

alors $c_n = \sum_{p+q=n} a_p \cdot b_q = a_n \cdot b_0 + a_{n-1} \cdot b_1 + \dots + a_0 \cdot b_n$

Alors la série de terme général c_n est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

+ - Séries à termes complexes :

Déf 4 : on dit que la série de terme général complexe U_n est convergente si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{p=0}^n U_p$ est une suite convergente de nombres complexes.

Prop. 8 : si $U_n = a_n + i \cdot b_n$, $\sum U_n$ est convergente si et seulement si les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ à termes réels sont convergentes. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) + i \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

Déf 5 : $\sum U_n$ est une série ^{complexe} absolument convergente si la série de terme général $|U_n| \geq 0$ (lire module) est convergente.

Prop. 9 : $\sum |U_n| \text{ CV} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum |a_n| \text{ CV} \\ \sum |b_n| \text{ CV} \end{cases}$

Rem 2 : résultats identiques (Prop. 7 et Thm 8)

i - Théorème des séries alternées, transf. d'Abel :

Thm 3 : (séries alternées) Si $U_n = (-1)^n |U_n|$ et si la suite $|U_n|$ est décroissante et tend vers 0, la série $\sum U_n$ est convergente.

Thm 4 : (transf° d'Abel) Supposons $U_n = a_n \cdot b_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Posons $A_n = \sum_{p=0}^n a_p$. Si

- 1) la suite A_n est bornée (il existe $A > 0$ t.q. $|A_n| \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$);
- 2) la suite b_n tend vers 0;
- 3) la série $\sum |b_n - b_{n+1}|$ est convergente;

alors la série $\sum U_n$ est convergente.

Corollaire 1: $\hat{=}$ hypothèses en remplaçant 2) et 3) par "la suite b_n est réelle décroissante tendant vers 0".

Rem 3 :

- pour des séries non absolument CV, prendre un équivalent du terme général ne mène à rien;
- des développements limités sont parfois très utiles.

Exercice n° 3 : étudier la nature des séries de terme général:

1) $U_n = \frac{(-1)^n}{n^a}$, $n \geq 1$;

2) $V_n = \frac{e^{in\theta}}{n^a}$, $n \geq 1$, $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{N}$ et $a > 0$;

3) $W_n = \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$ pour $n \geq 2$ et $a > 0$;

(c.f. avant pour correction).

XV - Suites de Fonction :

1) $\leadsto$ utiliser le théorème des séries alternées : si $U_n = (-1)^n |U_n|$ et si la suite $|U_n|$ est décroissante et tend vers 0, la série $\sum U_n$ est convergente.

$\leadsto$ CV ssi $a > 0$ et absolue CV ssi $a > 1$.

2) $V_n = \frac{e^{in\theta}}{n^a}$, avec $n \geq 1$, $\frac{\theta}{2\pi}$ non entier et $a > 0$.

$\leadsto$ utiliser ~~le cas~~ un cas particulier du thm d'Abel :

supposons $U_n = a_n \cdot b_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Posons

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k. \text{ Si}$$

a) la suite (A_n) est bornée ($\exists A > 0, \forall n, |A_n| \leq A$)

b) la suite (b_n) est réelle décroissante tendant vers 0.

$\leadsto 1/n^a = b_n$ tend vers 0 en décroissant.

$$\leadsto A_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta} = e^{i\theta} \cdot \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

$$1 - e^{i\theta} = e^{+i\theta/2} (e^{-i\theta/2} - e^{+i\theta/2}) = -2i e^{i\theta/2} \sin(\theta/2).$$

$$\Rightarrow |A_n| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}. \Rightarrow A_n \text{ bornée.}$$

3) $W_n = \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a} \right)$ pour $n \geq 2$ et $a > 0$.

$$\leadsto x = \frac{(-1)^n}{n^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\leadsto \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$