ANALYSE DE SIGNAUX ALEATOIRES POUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL

Les notes qui suivent portent sur les signaux dépendant d'une variable monodimensionnelle. Il faut cependant insister sur le fait que, formellement, ces résultats sont exactement les mêmes quand on les développe pour les signaux d'une variable bidimensionnelle ou même tridimensionnelle, les transformées de Fourier, produits de convolution, fonctions d'inter et autocorrélations étant à prendre alors au sens 2D où 3D.

I-SIGNAUX ALEATOIRES EN TEMPS CONTINU

1.Définition :

Un SA X en temps continu correspond à une **famille de variables aléatoires** (VA) $X(t), t \in R$.

Les VA $X(n)$ seront considérées comme pouvant être à valeurs dans R ou dans C.

Commentaires :

- à t fixé on est amené à considérer la loi de probabilité et les moments de la VA $X(t)$.
- à t_1 et t_2 fixés on est amené à considérer la loi de probabilité conjointe (bidimensionelle) et les moments conjoints de la paire de VA $(X(t_1), X(t_2))$, en particulier leur coefficient de corrélation
- à t_1, t_2, t_3 fixés ….
- A $\omega \in \Omega$ fixé la fonction $X_\omega(t) = X(t)(\omega), t \in R$ se ramène à un signal déterministe en temps continu à valeurs réelles ou complexes et est appelée réalisation X_ω de X.

2.Moyenne d'un SA X :

C'est la fonction $m_X(t) = E(X(t)), t \in R$.

Si $m_X(t)$ prend une même valeur m pour tout t on dit que la suite m_X est stationnaire ou encore que X est de moyenne stationnaire.

3.SA X_C associé à un SA X :

c'est le SA $X_C(t) = X(t) - m_X(t), t \in R$.

4.Covariance d'un SA *X* :

c'est la fonction de 2variables :

$$\boxed{C_X(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot X^*(t_2)), (t_1, t_2) \in R^2}$$

Si $C_X(t_1, t_2)$ ne dépend que de la différence $t_1 - t_2$ on dit que la covariance est stationnaire et on introduit alors la fonction de corrélation :

$$\boxed{\Gamma_X(\tau) = C_X(t, t-\tau)}.$$

4.Covariance centrée et corrélation centrée d'un SA *X* :

Ce sont les quantités obtenues en remplaçant dans la définition de la covariance et de la fonction de corrélation X par X_C. On note ces quantités C_{X_C} et Γ_{X_C}.

5.Puissance statistique moyenne d'un SA X :

C'est par définition la valeur quadratique moyenne (moyenne étant prise au sens statistique) de $X(t)$ à l'instant t :

$$\boxed{PSM(X)(t) = E(|X(t)|^2) = C_X(t,t),\ t \in R}.$$

Si la covariance est stationnaire cette quantité est évidemment constante au cours du temps.

6.DSP (densité spectrale de puissance) d'un SA X :

Dans le cas où sa covariance est stationnaire la DSP du SA X, notée γ_X, est définie comme étant égale à la transformée de Fourier de la fonction Γ_X :

$$\boxed{\gamma_X(f) = \int \Gamma_X(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau,\ f \in R}$$

Remarque : La transformation de Fourier peut être prise si nécessaire au sens des distributions

On en déduit immédiatement que :

$$\boxed{\Gamma_X(0) = PSM(X) = \int_R \gamma_X(f) df}$$

Remarque : Il est cohérent physiquement que γ_X soit appelée densité spectrale de puissance car en l'intégrant par rapport à f on obtient la puissance statistique moyenne. Si $X(t)$ s'exprime en Volts la DSP s'exprime donc en Volts par Hertz

7.Théorème de Wiener-Kintchine, Interprétation de la DSP :

Considérons le signal aléatoire à support borné : $X_T(t) = X(t)$ si $0 \le t \le T$ et $= 0$ sinon.

La VA $\frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T} |X(t)|^2 dt$ correspond à la puissance moyenne (*moyenne étant entendue ici comme moyenne temporelle et non pas comme espérance mathématique*) du signal X sur l'intervalle $[0,T]$.

Elle peut s'écrire, en utilisant la relation de Parseval : $\int \frac{1}{T} | \hat{X}_T(f) |^2 df$

où l'intégrande $\frac{1}{T}|\hat{X}(f)|^2$ (*qui à f fixé est une VA*) est appelé *périodogramme* et est noté $P_X^T(f)$. On a ainsi, de fait, introduit une fonction aléatoire (qui dépend de f au lieu de t) :

$$P_X^N : \Omega \times R \to R^+$$
$$(\omega, f) \to P_X^T(\omega, f)$$

qui s'interprète comme la densité spectrale de puissance (aléatoire du fait de la dépendance en ω) de la restriction du signal X à l'intervalle $[0,T]$.

Théorème (Wiener-Kintchine) :

Dans la mesure où l'une des limites suivantes existe (l'existence de l'une impliquant l'existence de l'autre) on montre que :

$$\boxed{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{T}E(P_X^T(f))\,,\, f\in R \ \overset{TF}{\leftrightarrow}\ \overline{C}_X(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}C_X(t,t-\tau)dt\,,\tau\in R}$$

Si la covariance de X est stationnaire alors $\overline{C}_X(\tau)=\Gamma_X(\tau)$ et $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{T}E(P_X^T(f))$ coïncide avec $\gamma_X(f)$ définie plus haut. Si la covariance n'est pas stationnaire mais que sa moyenne temporelle $\overline{C}_X(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}C_X(t,t-\tau)dt\,,\tau\in R$ existe la transformée de Fourier de cette dernière est prise comme étant égale par définition à la densité spectrale de puissance. Ceci permet ***d'élargir le champ*** de la première définition à des signaux pour lesquels par exemple $C_X(t,t-\tau)$ est périodique en t. Ces derniers interviennent couramment dans la modélisation de signaux du type modulations numériques et sont appelés signaux de covariance cyclostationnaire.

8.Etude simultanée de deux signaux aléatoires en temps continu

On généralise de manière évidente les notions de loi de probabilité, de moyenne, de fonction covariance et de fonction de corrélation introduites pour un signal aléatoire à valeurs réelles ou complexes à une paire de signaux aléatoires (et d'ailleurs à un nombre arbitraire mais on se limite ici à 2) également à valeurs réelles ou complexes. On introduit en particulier à l'ordre 2 pour deux SA X et Y (définis sur le même espace probabilisé) :

Fonction de covariance croisée non centrée entre X et Y :
$C_{X,Y}(t_1,t_2)=E(X(t_1)Y^*(t_2)),(t_1,t_2)\in R^2$

Fonction de covariance croisée centrée entre X et Y :
$C_{X_C,Y_C}(t_1,t_2)=E(X_C(t_1){Y_C}^*(t_2)),(t_1,t_2)\in R^2$

Fonctions de covariance *moyennées* croisées non centrée et centrée entre X et Y :

$$\overline{C}_{X,Y}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}C_{X,Y}(t,t-\tau)\,dt,\tau\in R$$

$$\overline{C}_{X_C,Y_C}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}C_{X_C,Y_C}(t,t-\tau)\,dt,\tau\in R$$

(quand les limites existent)

<u>Densités spectrale de puissance croisées entre *X* et *Y* (non centrée et centrée):</u>
Ce sont par définition et respectivement les quantités :

$$\gamma_{X,Y}(f) = \int \Gamma_{X,Y}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau,\ f \in R$$
$$\gamma_{X_C,Y_C}(f) = \int \Gamma_{X_C,Y_C}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau,\ f \in R$$

<u>Théorème de Wiener-Kintchine croisé :</u>

En introduisant le *périodogramme croisé* $P^T_{X,Y}(f) = \frac{1}{T}\hat{X}_T(f)\hat{Y}_T^{\,*}(f),\ f \in R$ on a :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{T}E(P^T_{X,Y}(f)),\ f \in R \ \overset{TF}{\leftrightarrow}\ \overline{C}_{X,Y}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} C_{X,Y}(t,t-\tau)dt,\ \tau \in R$$

(la version centrée du théorème s'obtenant *en remplaçant X et Y par leurs versions centrées*)

<u>Extension de la définition de la densité spectrale de Puissance croisée :</u>

Le théorème de Wiener-Kintchine permet ainsi d'étendre la définition de la densité spectrale de puissance croisée dans des cas où la covariance n'est pas stationnaire et où donc la fonction de corrélation n'existe pas (comme cela était déjà le cas dans l'étude de la densité spectrale d'un seul signal).

II-SIGNAUX ALEATOIRES EN TEMPS DISCRET

<u>1.Définition</u> :

Un signal aléatoire en temps discret (SAD) X correspond à une **suite de variables aléatoires** (VA) $X[n], n \in Z$.
Les $X[n]$ seront considérées comme pouvant être à valeurs dans R ou dans C.

Il en découle que :
- à n fixé on est amené à considérer la loi de probabilité et les moments de la VA $X[n]$
- à n et p fixés on est amené à considérer la loi de probabilité conjointe (bidimensionelle) et les moments conjoints de la paire de VA $(X[n], X[p])$, en particulier leur coefficient de corrélation
- à n, p, q, fixés ….
- à $\omega \in \Omega$ fixé la suite $X_\omega[n] = X[n](\omega), n \in Z$ se ramène à une suite de nombres réels ou complexes et est appelée réalisation X_ω de X.

<u>2.Moyenne d'un SAD</u> X :

C'est la suite des moyennes (espérances mathématiques) $m_X[n] = E(X[n]), n \in Z$ des VA $X[n]$.
Si $m_X[n]$ prend une même valeur m pour tout n on dit que la suite m_X est stationnaire ou encore que X est de moyenne stationnaire.

3.SAD X_C associé à un SAD X :
c'est la suite des VA centrées $X_C[n] = X[n] - m_X[n], n \in Z$.

5.Covariance d'un SAD X :
c'est la suite à 2 indices :

$$\boxed{C_X[n,m] = E(X[n] \cdot X^*[m]),(n,m) \in Z^2}$$

Si $C_X[n,m]$ ne dépend que de la différence $n-m$ on dit que la covariance est stationnaire et on introduit alors la **fonction de corrélation** discrète :

$$\boxed{\Gamma_X[p] = C_X[n,n-p],\ p \in Z}.$$

Covariance centrée et corrélation centrée de X :
ce sont les quantités obtenues en remplaçant dans la définition de la covariance et de la fonction de corrélation X par X_C. On note ces quantités C_{X_C} et Γ_{X_C}.

6.Puissance statistique moyenne d'un SAD *X* :
C'est par définition la valeur quadratique moyenne (moyenne étant prise au sens statistique) de $X[p]$ à l'instant *p* :

$$\boxed{PSM(X)[p] = E(|X[p]|^2) = C_X[p,p],\ p \in Z}.$$

Si la covariance est stationnaire cette quantité est évidemment constante au cours du temps.

7.DSP (densité spectrale de puissance) d'un SAD X :
Dans le cas où sa covariance est stationnaire la DSP du SAD X, notée γ_X^d , est définie comme étant égale à la transformée de Fourier de la suite Γ_X :

$$\boxed{\gamma_X^d(f) = \sum_{k \in Z} \Gamma_X[k] e^{-2\pi fk},\ f \in [-1/2, 1/2[}$$

qui est une fonction de la fréquence *f* de période 1 (ce qui permet de ne la décrire que sur un intervalle de longueur unité). Dans le cas où la somme ci-dessus converge au sens des fonctions sur *R* il est possible (et souvent pratique) d'introduire la transformée en Z *bilatérale* de la suite des corrélations. Cette transformée qui inclut le cercle unité dans son anneau de convergence est alors appelée DSP en Z :

$$\boxed{\gamma_X^Z(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_X[n] z^{-n}, r_1 < |z| < r_2 \text{ où } r_1 < 1 < r_2}$$

Pour retrouver les fonctions de corrélation il suffit d'utiliser les formules d'inversion pour la TFS ou pour la TZ :

$$\Gamma_X[p] = \int_{[-1/2,1/2[} \gamma_X^d(f)\, e^{2\pi i p f}\, df,\ p \in Z \quad \Gamma_X[p] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{cercle\ unité} \gamma_X^z(z)\, z^{n-1} dz,\ p \in Z$$

8.Théorème de Wiener-Kintchine, interprétation de la DSP :

Introduisons la suite aléatoire à support borné : $X_N[k] = X[k]$ si $0 \le k \le N-1$ et $=0$ sinon.

La VA $\frac{1}{N} \sum_{k=0..N-1} X^2[k]$ correspond à la puissance moyenne (moyenne étant entendue ici comme moyenne arithmétique et non pas comme espérance mathématique) de la suite X sur la suite d'instants $\{0,1,..,N-1\}$.

Elle peut s'écrire, en utilisant la relation deParseval : $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{N} \left| \hat{X}_N(f) \right|^2 df$

où l'intégrande (qui à f fixé est une VA) est appelé **périodogramme** et est noté $P_X^N(f)$.
On a ainsi, de fait, introduit une fonction aléatoire (qui dépend de f au lieu de t) :

$$P_X^N : \Omega \times [-1/2, 1/2[\to R^+$$
$$(\omega, f) \to P_X^N(\omega, f)$$

qui s'interprète comme la densité spectrale de puissance (aléatoire du fait de la dépendance en ω) de la suite X sur $\{1,...N\}$.

Théorème **(Wiener-Kintchine) :**
Dans la mesure où l'une des limites suivantes existe (l'existence de l'une impliquant l'existence de l'autre) on montre que :

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} E(P_X^N(f)),\ f \in [-1/2, 1/2[\ \overset{TF}{\leftrightarrow}\ \overline{C}_X(p) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C_X[k, k-p],\ p \in Z}$$

Si la covariance de X est stationnaire $\overline{C}_X[p] = \Gamma_X[p], p \in Z$ et $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} E(P_X^N(f))$ coïncide alors avec $\gamma_X^d(f)$ définie plus haut. Si la covariance n'est pas stationnaire mais que sa moyenne temporelle $\overline{C}_X[p] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C_X[k, k-p]$ existe la transformée de Fourier de cette dernière est prise comme étant égale par définition à la densité spectrale de puissance. Ceci permet *d'élargir le champ* de la première définition à des signaux pour lesquels par exemple $C_X[n, n-p]$ est périodique en n. Ces derniers interviennent couramment dans la modélisation de signaux du type modulations numériques et sont appelés signaux de covariance cyclostationnaire.

Etude simultanée de 2 SA en temps discret

Elle est en tout point semblable à celle d'une paire de SA en temps continu. On se reportera donc à cette dernière en faisant les adaptations nécessaires

III-DEMONSTRATION DU TREOREME DE WIENER KINTCHINE

<u>Cas d'un signal du temps continu</u>

Théorème :

$$\lim_{T\to\infty} E(\frac{1}{T}\left|\hat{X}_T(f)\right|^2),\ f\in R \overset{TF^{-1}}{\rightarrow} \overline{C}_X(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} C_X(t,t-\tau)dt\ \tau\in r$$

Preuve :

$$E(\frac{1}{T}\left|\hat{X}_T(f)\right|^2)=E(\frac{1}{T}\left|\int_{-T/2}^{T/2} X(t)e^{-2\pi ift}dt\right|^2)=E(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} X(t)e^{-2\pi ift}dt.\int_{-T/2}^{T/2} X^*(t)e^{+2\pi ift}dt)$$

$$=E(\frac{1}{T}.\int_{t=-T/2}^{T/2}\int_{t'=-T/2}^{T/2} X(t)e^{-2\pi ift}X^*(t')e^{+2\pi ift'}dt\,dt')$$

$$=\frac{1}{T}.\int_{t\in R}\int_{t'\in R} P_T(t)\,P_T(t')\,C_X(t,t')\,e^{-2\pi if(t-t')}dt\,dt' \quad \text{où} \quad P_T(t)=1_{[-T:2,T:2]}(t)$$

$$=\frac{1}{T}.\int_{t\in R}\int_{\tau\in R} P_T(t)\,P_T(t-\tau)\,C_X(t,t-\tau)\,e^{-2\pi if(\tau)}dt\,d\tau$$

la dernière égalité étant obtenue par le changement de variable $(t,t')\rightarrow(t,\tau)$ où $\tau=t-t'$ qui correspond à une transformation de jacobien égal à 1 (ce qui permet de substituer $dt.d\tau$ à $dt.dt'$).

L'intégrale double ainsi obtenue peut encore s'écrire (on considère pouvoir appliquer le théorème de Fubini) :

$$\int_{\tau\in R}\frac{1}{T}(\int_{t\in R} P_T(t)\,P_T(t-\tau)\,C_X(t,t-\tau)\,dt)\ e^{-2\pi if\tau}d\tau=\int_{\tau\in R}(\frac{1}{T}\int_{t=\max(-T/2+\tau,-T/2)}^{t=\min(T/2+\tau,T/2)} C_X(t,t-\tau)\,dt)\ e^{-2\pi if\tau}d\tau$$

et en remarquant que

$$\frac{1}{T}\int_{t=\max(-T/2+\tau,-T/2)}^{t=\min(T/2+\tau,T/2)} C_X(t,t-\tau)\,dt)\ \underset{T\to\infty}{\rightarrow}\overline{C}_X(\tau),\ \tau\in R$$

on aboutit à (en admettant de pouvoir échanger la prise de limite et l'intégration par rapport à τ, ce qui est vrai par exemple si la limite ci-dessus existe dans l'espace des distributions *S'* car alors lim(TF)=TF(lim)) :

$$E(\frac{1}{T}\left|\hat{X}_T(f)\right|^2)=\int_{\tau\in R}(\frac{1}{T}\int_{t=\max(-T/2+\tau,-T/2)}^{t=\min(T/2+\tau,T/2)} C_X(t,t-\tau)\,dt)\ e^{-2\pi if\tau}d\tau\ ,\ f\in R\xrightarrow[T\to\infty]{}\hat{\overline{C}}_X(f),\ f\in R$$

cqfd

Autres cas
La démonstration de ce théorème est point à point similaire quand on considère le cas du temps discret et lorsqu'on étend au cas des densités spectrales croisées que ce soit en temps continu où en temps discret.

IV-PROPRIETES DES COVARIANCES, DES FONCTIONS DE CORRELATION ET DES DENSITES SPECTRALES DE PUISSANCES

1.Covariances

$$C_X(u,v) = C_X^*(v,u),\ C_{X,Y}(u,v) = C_{Y,X}^*(v,u)$$
$$C_X(u,v) = C_{X_C}(u,v) + m_X(u)m_X^*(v)$$
$$C_{X,Y}(u,v) = C_{X_C,Y_C}(v,u) + m_X(u)m_Y^*(v)$$
$$C_{X+Y}(u,v) = C_X(u,v) + C_Y(u,v) + C_{X,Y}(u,v) + C_{Y,X}(u,v)$$
$$si\ C_{X_C,Y_C}(v,u) = 0, (u,v) \in R^2\ alors$$
$$C_{X+Y}(u,v) = C_X(u,v) + C_Y(u,v) + m_X(u)m_Y^*(v) + m_Y(u)m_X^*(v)$$

2.Fonctions de corrélation

$$\Gamma_X(u) = \Gamma_X^*(-u),$$

$$Si\ X\ SSL\ alors\ \Gamma_X(u) = \Gamma_{X_C}(u) + |m_X|^2$$

$Si\ X, Y$ conjointement SSL
$$\Gamma_{X,Y}(u,v) = \Gamma_{X_C,Y_C}(v,u) + m_X m_Y^*$$

$$\Gamma_{X+Y}(u) = \Gamma_X(u) + \Gamma_Y(u) + \Gamma_{X,Y}(u) + \Gamma_{Y,X}(u)$$

$$si\ \Gamma_{X_C,Y_C}(v) = 0, (u) \in R\ alors$$
$$\Gamma_{X+Y}(u,v) = \Gamma_X(u) + \Gamma_Y(u) + m_X m_Y^* + m_Y m_X^*$$

3.Densités spectrales

$\gamma_X(f) \in R^+$ (que X soit à valeurs réelles ou complexes)

Si $X(t) \in R$ alors $\gamma_X(-f) = \gamma_X(f),\ f \in R$
Si X SSL et si pas de terme en δ_0 dans γ_X alors $m_X = 0$
$\gamma_{X,Y}(f) = \gamma^*_{Y,X}(f),\ f \in R$
Si X,Y conjointement SSL alors $\gamma_{X,Y}(f) = \gamma_{X_C,Y_C}(f) + m_X m_Y^* \delta_0(f),\ f \in R$

V-FILTRAGE LINEAIRE DE SIGNAUX ALEATOIRES

Il s'agit d'étudier comment se transforment les caractéristiques statistiques de signaux aléatoires lorsqu'ils subissent un filtrage linéaire. L'analyse s'avère être strictement parallèle dans le cas du temps continu et dans celui du temps discret .

1.Transformation de la loi de probabilité

La transformation de la loi de probabilité est un problème très complexe sauf dans des cas particuliers . Parmi ces derniers le plus important en pratique est celui où le signal d'entrée suit une loi gaussienne auquel cas on peut montrer que le signal de sortie et le signal d'entrée suivent une loi conjointement gaussienne ce qui implique que la loi marginale du signal de sortie est elle aussi gaussienne .

2.Transformation des moments d'ordre 1 et 2.

a.Transformation de la moyenne

Soit le signal aléatoire X filtré par un système linéaire et homogène de réponse impulsionnelle H et soit Y le signal aléatoire obtenu en sortie. La relation entre les réalisations du signal d'entrée et celle du signal de sortie est :

$Y_\omega(t) = \int_R H(u) X_\omega(t-u)du, t \in R$ dans le cas du temps continu et

$Y_\omega[n] = \sum_Z H[k] X_\omega[n-k], n \in Z$ dans le cas du temps dicret,

tandis que *la relation entre variables aléatoires s'écrit à l'identique en effaçant le symbole de réalisation* ω.

En admettant (ce que l'on peut montrer sous des conditions non restrictives du point de vue des sciences de l'ingénieur) que l'on puisse commuter les opérateurs $E(\,)$ et $\int$ ainsi que les opérateurs $E(\,)$ et $\sum$, on obtient :

$$m_Y(t) = E(Y(t)) = \int_R H(u) E(X(t-u)du = (H * m_X)(t), t \in R$$
$$m_Y[n] = E(Y[n]) = \sum_Z H[k] E(X[n-k]) = (H * m_X)[n], n \in Z$$

Dans le cas où m_X est stationnaire (c'est à dire égale à une constante) ces formules deviennent :

$$m_Y(t) = E(Y(t)) = m_X \hat{H}(o) = cte \ \forall t$$
$$m_Y[n] = E(Y[n]) = m_X \hat{H}(o) = cte \ \forall n$$

b.Transformation de la covariance

Nous allons considérer d'emblée le filtrage linéaire de deux signaux aléatoires X_1 et X_2 que l'on présente respectivement sur les entrées de deux filtres linéaires de réponses impulsionnelles H_1 et H_2. En admettant toujours que l'on puisse échanger les opérateurs espérance mathématique et somme il vient pour le calcul de la covariance croisée entre les deux sorties :

$$C_{Y_1,Y_2}(t,t-\tau) = E[(\int_R H_1(u)X_1(t-u)du).(\int_R H_2(v)X_2(t-\tau-v)dv)^*] =$$
$$\iint_{RxR} H_1(u)H_2^*(v)E(X_1(t-u)X_2^*(t-\tau-v))dudv$$

ce qui conduit à :

$$\boxed{C_{Y_1,Y_2}(t,t-\tau) = \iint_{RxR} H_1(u)H_2^*(v)C_{X_1,X_2}(t-u,t-\tau-v)dudv}$$

Dans le cas où la covariance croisée entre les entrées est stationnaire et où on a donc une fonction d'intercorrélation, la covariance croisée entre les sorties est également stationnaire et l'on obtient une fonction d'intercorrélation en sortie :

$$\boxed{\Gamma_{Y_1,Y_2}(\tau) = (COR(H_1,H_2)*\Gamma_{X_1,X_2})(\tau),\ \tau \in R}$$

tandis que pour une seule voie de filtrage on obtient :

$$\boxed{\Gamma_{Y_i}(\tau) = (COR(H_i,H_i)*\Gamma_{X_i})(\tau),\ \tau \in R,\ i = 1,2}$$

Si les covariances ne sont pas stationnaires mais qu'elles sont stationnarisables les 2 formules ci-dessus restent valables en remplaçant respectivement Γ_{X_1,X_2} *et* Γ_{X_i} *par* $\overline{C}_{X_1,X_2}$ *et* $\overline{C}_{X_i}$.

Des formules analogues peuvent être obtenues dans le cas du temps discret :

$$C_{Y_1,Y_2}[n,n-p] = \sum_{(i,j)\in Z^2}\sum H_1[i]H^*{}_2[j]C_{X_1,X_2}[n-i,n-p-j],\ n \in Z,\ p \in Z$$

$$C_{Y_i}[n,n-p]=\sum_{(l,j)\in Z^2}\sum H_i[l]H_i^*[j]C_{X_i}[n-l,n-p-j],\ n\in Z,\ p\in Z,\ i=1,2$$

Si la <u>covariance</u> C_{X_1,X_2} est <u>stationnaire</u> on obtient :

$$\Gamma_{Y_1,Y_2}[p]=(COR(H_1,H_2)*\Gamma_{X_1,X_2})[p],\ p\in Z$$

et si les <u>covariances</u> C_{X_1}, C_{X_2} sont <u>stationnaires</u> on obtient :

$$\Gamma_{Y_i}[p]=(COR(H_i,H_i)*\Gamma_{X_i})[p], p\in Z,\ i=1,2$$

Si les covariances ne sont pas stationnaires mais qu'elles sont stationnarisables les 2 formules ci-dessus restent valables en remplaçant respectivement Γ_{X_1,X_2} et Γ_{X_i} par $\bar{C}_{X_1,X_2}$ et $\bar{C}_{X_i}$.

c.Transformation des densités spectrales de puissance simple et croisée

En considérant les définitions les plus générales des DSP, $\gamma_{S_1,S_2}=TF(\bar{C}_{S_1,S_2})$, $\gamma_S=TF(\bar{C}_S)$ (ce qui recouvre le cas où les covariances sont stationnaires puisqu'il suffit alors de remplacer respectivement $\bar{C}_{X_1,X_2}$, $\bar{C}_X$ par Γ_{X_1,X_2}, Γ_X) et en prenant la TF des 2 membres de

$$\Gamma_{Y_1,Y_2}(\tau)=(COR(H_1,H_2)*\Gamma_{X_1,X_2})(\tau),\ \tau\in R,$$
$$\Gamma_{Y_i}(\tau)=(COR(H_i,H_i)*\Gamma_{X_i})(\tau),\ \tau\in R,\ i=1,2$$

dans le cas du temps continu et des 2 membres de

$$\Gamma_{Y_1,Y_2}[p]=(COR(H_1,H_2)*\Gamma_{X_1,X_2})[p],\ p\in Z,$$
$$\Gamma_{Y_i}[p]=(COR(H_i,H_i)*\Gamma_{X_i})[p], p\in Z,\ i=1,2$$

dans le cas du temps discret on aboutit aux expressions suivantes des DSP croisées et non croisées (en appliquant les propriétés de la TF (et de la TFS) concernant les opérations COR(.,.) et convolution dans le domaine temporel, voir partie du cours sur signaux déterministes) :

<u>en temps continu :</u>

$$\gamma_{Y_1,Y_2}(f)=\gamma_{X_1,X_2}(f).\hat{H}_1(f).\hat{H}_2^*(f),\ f\in R\ \text{(DSP croisée)}$$
$$\gamma_{Y_i}(f)=\gamma_{X_i}(f).\left|\hat{H}(f)\right|^2,\ f\in R,\ i=1,2\ \text{(DSP simples)}$$

<u>en temps discret :</u>

$$\gamma^d_{Y_1,Y_2}(f) = \gamma^d_{X_1,X_2}(f).\hat{H}_1(f).\hat{H}_2^*(f),\ f \in [-1/2,1/2[\ \text{(DSP croisée)}$$
$$\gamma^d_{Y_i}(f) = \gamma^d_{X_i}(f).\left|\hat{H}(f)\right|^2,\ f \in [-1/2,1/2[,\ i = 1,2\ \ \text{(DSP simples)}$$

Toutes les formules (exprimant les relations quand on passe de(s) l'entrée(s) à la (aux) sortie(s) des filtres entre covariances , entre corrélations et entre densités spectrales) restent valables lorsque ces quantités sont remplacées par leurs versions centrées. Ceci est évident puisque les formules développées le sont pour des m_X (fonctions ou suites) quelconques et restent donc vraies pour des m_X nulles.

VI-BRUIT BLANC

L'appellation bruit blanc à son origine dans la lumière blanche qui est considérée en physique comme présentant une répartition de puissance uniforme sur l'ensemble des longueurs d'onde du spectre électromagnétique et par conséquent sur l'ensemble des fréquences, ce qui correspond à une fonction égale à une constante sur l'axe des fréquences.

1.Définition (bruit blanc en temps discret) :

On appelle bruit blanc discret (BBD) tout SAD X admettant une DSP centrée égale à une constante (évidemment réelle positive) :

$$\gamma^d_{X_c}(f) = a \in R^+, -1/2 \leq f < 1/2$$

Remarque : suivant les auteurs un bruit blanc est considéré ou non comme étant centré. La définition adoptée ici, clairement , ne suppose pas le caractère centré.

En conséquence de la définition si un BBD est supposé de covariance centrée stationnaire il admet une fonction d'autocorrélation de la forme :

$\Gamma_{X_C}[p] = a\,\delta_0[p],\ p \in Z$ où δ_0 désigne (comme l'indiquent les crochets) le symbole de Kronecker.
La forme de cette fonction de corrélation implique que si $k \neq l$ les VA $X[k]$ et $X[l]$ sont décorrélées

2.Définition (bruit blanc en temps continu) :
On appelle bruit blanc (BB) en temps continu tout SA X admettant une DSP centrée égale à une constante sur R :

$\gamma_{X_c}(f) = \frac{N_0}{2} \in R^+, -\infty \le f < +\infty$ où la notation $\frac{N_0}{2}$ est celle usitée dans la littérature dans le domaine des télécommunications (on peut évidemment choisir un symbole quelconque pour désigner cette constante). Si le bruit blanc est supposé admettre une fonction de corrélation centrée, celle ci devant correspondre à la transformée inverse de la DSP centrée prend alors la forme :

$\Gamma_{X_C}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta_0(\tau),\ \tau \in R$ où δ_0 désigne ici (comme l'indiquent les parenthèses) la distribution de Dirac à l'origine.

3.Interprétation et filtrage d'un bruit blanc

Considérer la puissance statistique moyenne d'un bruit blanc de covariance stationnaire (en temps continu) mène à une inconsistance physique : $PSM(X) = \frac{N_0}{2}\delta_0(0) = \infty$ (rappelons que $PSM(X)(t) = E(|X(t)|^2)$).Un tel SA n'est pas un SA d'ordre 2 et n'admet donc pas de fonction de corrélation en un sens classique. Cependant l'analyse formelle du filtrage linéaire d'un bruit blanc permet de mieux cerner et de relativiser cette difficulté. Soit donc un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $H \in L^2$ (c'est à dire de module carré intégrable). Le calcul formel au moyen des formules développées pour les SA d'ordre 2 conduit à , pour la sortie *Y* du filtre :

$$PSM(Y_C) = \int_R \gamma_{Y_C}(f)df = \int_R \left|\hat{H}(f)\right|^2 \gamma_{X_C}(f)df = \frac{N_0}{2}\int_R \left|\hat{H}(f)\right|^2 df < \infty$$

Le calcul de la puissance en sortie de tout filtre à réponse impulsionnelle de carré intégrable ne mène donc à aucune contradiction physique. En fait le 'modèle bruit blanc' est très utile dans la mesure où sa substitution à un modèle de bruit de DSP centrée constante sur un intervalle $[-B, B]$ et décroissante à l'extérieur de ce même intervalle (de sorte que la PSM centrée soit finie) permettra d'obtenir des résultats inchangés en sortie de tout système insensible à la présence sur son entrée de composantes harmoniques à l'extérieur de $[-B, B]$.

4.Bruit blanc non centré

Un bruit blanc de moyenne non nulle stationnaire aura une DSP de la forme :

$\gamma_X(f) = \frac{N_0}{2} + |m_X|^2 \delta_0(f), -\infty < f < +\infty$ en temps continu et

$\gamma_X^d(f) = a + |m_X|^2 \delta_0(f), -1/2 \le f < 1/2$ en temps discret (l'extension sur *R* faisant apparaître un peigne de Dirac de période unité et d'amplitude $|m_X|^2$).