

Correction de l'exercice n° VI du TD n° 1.

Commençons tout d'abord par réécrire mathématiquement la question posée ; soient les événements suivants :

H : " l'étudiant choisit la réponse au hasard "

$\bar{H}$: " l'étudiant connaît la bonne réponse "

BRD : " l'étudiant donne la bonne réponse "

Remarquons que $\bar{H}$ est le complémentaire de H . L'exercice consiste alors à calculer la probabilité conditionnelle $P(H/BRD)$. Dès lors, appliquons la règle de Bayes :

$$P(H/BRD) = \frac{P(H \cap BRD)}{P(BRD)} \quad (1)$$

En notant Ω l'ensemble de tous les événements possibles, autrement dit " l'univers des possibles " tel que $P(\Omega) = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(BRD) &= P(BRD \cap \Omega) = P(BRD \cap \{H \cup \bar{H}\}) \\ &= P(\{BRD \cap H\} \cup \{BRD \cap \bar{H}\}) \\ &= P(BRD \cap H) + P(BRD \cap \bar{H}) \quad \text{car } \{BRD \cap H\} \\ &\quad \text{et } \{BRD \cap \bar{H}\} \text{ sont incompatibles.} \\ &= P(BRD/H) \cdot P(H) + P(BRD/\bar{H}) \cdot P(\bar{H}) \quad (\text{règle de Bayes}) \end{aligned}$$

De même, on peut réécrire le numérateur de (1) tel que :

$$P(H \cap BRD) = P(BRD/H) \cdot P(H) \quad (\text{tiré d'après Bayes}).$$

Or, d'après l'énoncé, on sait que :

$$P(\bar{H}) = p, \text{ et donc } P(H) = 1 - p.$$

De plus, on déduit de l'énoncé que :

$$P(\text{BRD} / \bar{H}) = 1 \quad \text{et} \quad P(\text{BRD} / H) = 1/N.$$

En effet, si l'étudiant connaît la bonne réponse, il va obligatoirement la donner. Par contre, s'il répond au hasard il a une chance sur N (nbre total de réponses) de trouver la bonne réponse. On obtient donc :

$$P(H / \text{BRD}) = \frac{\frac{1}{N} \times (1 - p)}{\frac{1}{N} \times (1 - p) + 1 \times p} = \frac{1}{1 + \frac{N \cdot p}{1 - p}}$$

On en déduit alors les résultats suivants.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P(H / \text{BRD}) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} P(H / \text{BRD}) = 0 \quad (3)$$

Les résultats (2) et (3) sont logiques. En effet, (2) est logique dans la mesure où plus il y a de réponses possibles, plus il est difficile de donner au hasard la bonne réponse. De même, (3) était attendu car si l'étudiant connaît à coup sûr la bonne réponse ($p=1$), il n'y a aucune chance qu'il la donne au hasard ($P(H / \text{BRD}) = 0$).