TD de TS (maîtrise)
Liste n° 2.

Exercice n° 3 :

1) Le signal aléatoire Z est gaussien ;

$\Leftrightarrow$ $\forall N$, $\forall t_1, t_2, \dots, t_N$, $[Z(t_1), \dots, Z(t_N)]^T$ est un vecteur de loi conjointe gaussienne ;

$\Leftrightarrow$ toute combinaison linéaire $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n . Z(t_n)$ est une variable aléatoire gaussienne ;

Démontrons que Z est gaussien, autrement dit que nous avons l'une des 3 assertions précédentes. Par exemple, montrons que nous avons la 3^e assertion.

$\forall N$, $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_N$,

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n . Z(t_n) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n . \left(X \cos(2\pi f_0 t_n) + Y \sin(2\pi f_0 t_n)\right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n . \cos(2\pi f_0 t_n)\right) . X + \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n . \sin(2\pi f_0 t_n)\right) Y$$

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n . Z(t_n) = \beta_1 . X + \beta_2 . Y \qquad (*)$$

où $\beta_1 = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n . \cos(2\pi f_0 t_n)$ et $\beta_2 = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n . \sin(2\pi f_0 t_n)$

Or comme X et Y sont des variables aléatoires gaussiennes, on déduit de $(*)$ que $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n . Z(t_n)$ est une combinaison de variables aléatoires gaussiennes. Par conséquent, d'après la propriété (1) de l'énoncé disant que " toute combinaison de variables gaussiennes est une variable aléatoire gaussienne ", on conclut que $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n . Z(t_n)$ est une variable aléatoire gaussienne.

Nous venons ainsi de prouver que la 3e assertion était vrai, et donc que Z est un signal aléatoire gaussien.

3) Calculons les moments d'ordre 1 et 2 de $Z(t)$:

- $E[Z(t)] = E[\cos(2\pi F_0 t) . X + \sin(2\pi F_0 t) Y]$

$$= \cos(2\pi F_0 t) E[X] + \sin(2\pi F_0 t) E[Y].$$

Or X et Y sont des v.a. centrées, c'est-à-dire :
$E[X] = E[Y] = 0$.
Par conséquent, on a :
$m_Z(t) = E[Z(t)] = 0$.

- $E[Z(t_1) . Z(t_2)] = E\Big[\big(\cos(2\pi F_0 t_1) X + \sin(2\pi F_0 t_1) Y\big) \times \big(\cos(2\pi F_0 t_2) X + \sin(2\pi F_0 t_2) Y\big)\Big]$

$$= E\Big[\cos(2\pi F_0 t_1) . \cos(2\pi F_0 t_2) X^2 + \cos(2\pi F_0 t_1) \sin(2\pi F_0 t_2) X . Y + \sin(2\pi F_0 t_1) \cos(2\pi F_0 t_2) Y . X + \sin(2\pi F_0 t_1) \sin(2\pi F_0 t_2) Y^2\Big].$$

$$= \cos(2\pi F_0 t_1) . \cos(2\pi F_0 t_2) E[X^2] + \cos(2\pi F_0 t_1) \sin(2\pi F_0 t_2) E[XY] + \sin(2\pi F_0 t_1) \cos(2\pi F_0 t_2) E[YX] + \sin(2\pi F_0 t_1) \sin(2\pi F_0 t_2) E[Y^2].$$

Or X et Y sont indépendantes, donc $\left| \begin{array}{l} E[XY] = E[X] . E[Y] \\ E[YX] = E[Y] . E[X] \end{array} \right.$

et comme X et Y sont centrées, on a : $E[XY] = 0 \times 0 = 0$.

D'autre part, X et Y sont réduites, ce qui signifie que leur variance vaut 1, i.e. :

$$E[X^2] - (E[X])^2 = 1$$
$$E[Y^2] - (E[Y])^2 = 1.$$

En tenant compte du fait que $E[X] = E[Y] = 0$, on obtient donc :

$$E[X^2] = E[Y^2] = 1.$$

Par conséquent, on obtient :

$$E[Z(t_1).Z(t_2)] = \cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2) + \sin(2\pi f_0 t_1)\sin(2\pi f_0 t_2).$$

$$E[Z(t_1).Z(t_2)] = \cos\left(2\pi f_0 (t_1 - t_2)\right).$$

En posant : $\begin{cases} t = t_1 \\ \tau = t_1 - t_2 \end{cases}$, on obtient :

$$E[Z(t).Z(t-\tau)] = \cos\left(2\pi f_0 \tau\right).$$

8) En prenant : $\left.\begin{array}{l} m_1 = m_Z(t_1) = 0 \\ m_2 = m_Z(t_2) = 0 \end{array}\right\}$ d'après le résultat de la question 3)

$$\rho = \mathrm{Cov}\left(Z(t_1), Z(t_2)\right) = \cos\left(2\pi f_0 (t_1 - t_2)\right)$$

On rappelle que : $\mathrm{Cov}\left(Z(t_1), Z(t_2)\right) = E[Z(t_1).Z(t_2)] - \underbrace{E[Z(t_1)]}_{=\,0 \text{ ici}}.\underbrace{E[Z(t_2)]}_{=\,0}$

où : $\sigma_1^2 = E[Z(t_1)^2] - (\underbrace{E[Z(t_1)]}_{\overset{\parallel}{0} \text{ ici}})$

$$\sigma_1^2 = E[Z(t_1)^2]$$
$$= E[Z(t_1).Z(t_1-\tau)]\Big|_{\tau=0}$$
$$\sigma_1^2 = \cos(2\pi f_0 \tau)\Big|_{\tau=0} = \cos(0) = 1.$$

Même chose pour $\sigma_2^2 = E[Z(t_2)^2] - (E[Z(t_2)])^2$
d'où : $\sigma_2^2 = 1$.

On obtient donc comme densité de proba conjointe du couple $(Z(t_1), Z(t_2))$:

$$p_{Z(t_1),Z(t_2)}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(z_1^2+z_2^2-2\rho z_1 z_2\right)\right\}$$

pour $t_1 \neq t_2$.

4) On sait que :

$$p_{Z(t_2)/Z(t_1)=z_1}(z_2) = \frac{p_{Z(t_1),Z(t_2)}(z_1,z_2)}{p_{Z(t_1)}(z_1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left(z_1^2+z_2^2-2\rho z_1 z_2\right)\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} z_1^2\right\}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[z_1^2+z_2^2-2\rho z_1 z_2-(1-\rho^2)z_1^2\right]\right\}$$

Or : $z_1^2 + z_2^2 - 2\rho z_1 z_2 - (1-\rho^2) z_1^2 = z_2^2 - 2\rho z_1 z_2 + \rho^2 z_1^2$
$= (z_2 - \rho z_1)^2$

D'où :

$$(**) \quad p_{Z(t_2)/Z(t_1)=z_1}(z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(z_2 - \rho z_1)^2\right\}$$

On remarque alors par comparaison avec la densité de proba d'une v.a. gaussienne que $p_{Z(t_2)/Z(t_1)=z_1}(t_2)$, d'après son expression $(**)$, est la densité de proba d'une v.a. gaussienne ~~de~~ d'espérance ρz_1 et de variance $(1-\rho^2)$, i.e. :

$$Z(t_2) / Z(t_1) = z_1 \sim \mathcal{N}(\rho z_1, 1-\rho^2).$$

Ceci nous permet de répondre à la question :

$$E[Z(t_2) / Z(t_1) = z_1] = \rho \cdot z_1$$
$$E[Z(t_2) / Z(t_1) = z_1] = \cos(2\pi f_0 \tau) \cdot z_1 \quad \text{où } \tau = t_1 - t_2.$$