Localisation d'activité intracérébrale à partir d'électrodes de surface (séance 2)

ESIR 2 option Ingénierie Biomédicale

Université de Rennes 1

1 Introduction

L'objectif de cette seconde séance est d'implémenter l'algorithme ALS (Alternating Least Squares) étudié en cours et en TD, et d'en évaluer la performance.

2 L'algorithme ALS

2.1 Définitions et propriétés

Considérons un tableau $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_{n_1,n_2,n_3})$ d'ordre trois de taille $(N_1 \times N_2 \times N_3)$, calculer la décomposition Canonique Polyadique (CP) de rang P de $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ consiste à identifier trois matrices $\boldsymbol{U}^{(1)}$, $\boldsymbol{U}^{(2)}$ et $\boldsymbol{U}^{(3)}$ de tailles respectives $(N_1 \times P)$, $(N_2 \times P)$ et $(N_3 \times P)$ telles que chaque composante $\mathcal{T}_{n_1,n_2,n_3}$ de $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ puisse s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{T}_{n_1,n_2,n_3} = \sum_{p=1}^{P} U^{(1)}_{n_1,p}\, U^{(2)}_{n_2,p}\, U^{(3)}_{n_3,p} \tag{1}$$

où $U^{(i)}_{n_i,p}$ désigne la composante (n_i, p) de la matrice $\boldsymbol{U}^{(i)}$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Rappelons que les trois matrices de dépliement de $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, nommées $\boldsymbol{T}^{(1)}$, $\boldsymbol{T}^{(2)}$ et $\boldsymbol{T}^{(3)}$, de tailles respectives $(N_1 \times N_2N_3)$, $(N_2 \times N_2N_3)$ et $(N_3 \times N_1N_3)$, dont les composantes sont définies par :

$$T^{(1)}_{n_1,n_3+N_3(n_2-1)} = \mathcal{T}_{n_1,n_2,n_3} \qquad T^{(2)}_{n_2,n_1+N_1(n_3-1)} = \mathcal{T}_{n_1,n_2,n_3} \qquad T^{(3)}_{n_3,n_2+N_2(n_1-1)} = \mathcal{T}_{n_1,n_2,n_3} \tag{2}$$

sont reliées aux matrices de facteurs $\boldsymbol{U}^{(1)}$, $\boldsymbol{U}^{(2)}$ et $\boldsymbol{U}^{(3)}$ de la manière suivante :

$$\boldsymbol{T}^{(1)} = \boldsymbol{U}^{(1)}(\boldsymbol{U}^{(3)} \odot \boldsymbol{U}^{(2)})^{\mathsf{T}} \qquad \boldsymbol{T}^{(2)} = \boldsymbol{U}^{(2)}(\boldsymbol{U}^{(1)} \odot \boldsymbol{U}^{(3)})^{\mathsf{T}} \qquad \boldsymbol{T}^{(3)} = \boldsymbol{U}^{(3)}(\boldsymbol{U}^{(2)} \odot \boldsymbol{U}^{(1)})^{\mathsf{T}} \tag{3}$$

où $\odot$ est l'opérateur du produit de Khatri-Rao. Sous certaines hypothèses d'unicité essentielle de la décomposition CP (voir cours), la méthode ALS (voir algorithme 1) fournit une estimée des matrices $\boldsymbol{U}^{(1)}$, $\boldsymbol{U}^{(2)}$ et $\boldsymbol{U}^{(3)}$ (à une matrice diagonale et une matrice de permutation près) à partir du tableau $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ et plus particulièrement à partir de ses trois matrices de dépliement. La qualité d'estimation des matrices de facteurs de $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ et par conséquent la qualité de décomposition de $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ peut être évaluée au travers des deux fonctions suivantes :

$$f^{(1)}(\widehat{\boldsymbol{U}}^{(1)}, \widehat{\boldsymbol{U}}^{(2)}, \widehat{\boldsymbol{U}}^{(3)}) = ||\boldsymbol{T}^{(1)} - \widehat{\boldsymbol{U}}^{(1)}(\widehat{\boldsymbol{U}}^{(3)} \odot \widehat{\boldsymbol{U}}^{(2)})^{\mathsf{T}}||_{\mathrm{F}}^2 \tag{4}$$

$$\psi(\widehat{\boldsymbol{U}}^{(1)}, \widehat{\boldsymbol{U}}^{(2)}, \widehat{\boldsymbol{U}}^{(3)}) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \Delta(\boldsymbol{U}^{(i)}, \widehat{\boldsymbol{U}}^{(i)}) \tag{5}$$

où la fonction Δ est définie par :

$$\Delta(\boldsymbol{U}^{(i)}, \widehat{\boldsymbol{U}}^{(i)}) = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^{P} \min_{p' \in \{1,\ldots,P\}} d(\boldsymbol{U}^{(i)}_{:,p}, \widehat{\boldsymbol{U}}^{(i)}_{:,p'}) \tag{6}$$

et où la pseudo-distance d entre deux vecteurs colonnes est donnée par :

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1 - \frac{|\boldsymbol{a}^{\mathsf{H}}\, \boldsymbol{b}|}{||\boldsymbol{a}||\, ||\boldsymbol{b}||} \tag{7}$$

Algorithm 1 Les différentes étapes de l'ALS

Choix des valeurs ε et $itmax$.
Initialisation aléatoire des matrices $\boldsymbol{V}^{(1,0)}$, $\boldsymbol{V}^{(2,0)}$, $\boldsymbol{V}^{(3,0)}$, $\boldsymbol{V}^{(1,1)}$, $\boldsymbol{V}^{(2,1)}$ et $\boldsymbol{V}^{(3,1)}$.
Construction des matrices de dépliement $\boldsymbol{T}^{(1)}$, $\boldsymbol{T}^{(2)}$ et $\boldsymbol{T}^{(3)}$ de $\boldsymbol{\mathcal{T}}$.
$it := 1$
while $|f^{(1)}(\boldsymbol{V}^{(1,it)}, \boldsymbol{V}^{(2,it)}, \boldsymbol{V}^{(3,it)}) / f^{(1)}(\boldsymbol{V}^{(1,it-1)}, \boldsymbol{V}^{(2,it-1)}, \boldsymbol{V}^{(3,it-1)})| > \varepsilon$ et $it < itmax$ **do**
  $it := it + 1$
  $\boldsymbol{W}^{(1,it)} := \boldsymbol{V}^{(3,it-1)} \odot \boldsymbol{V}^{(2,it-1)}$
  $\boldsymbol{V}^{(1,it)} := \boldsymbol{T}^{(1)}\, \boldsymbol{W}^{(1,it)} (\boldsymbol{W}^{(1,it)\mathsf{T}}\, \boldsymbol{W}^{(1,it)})^{-1}$
  $\boldsymbol{W}^{(2,it)} := \boldsymbol{V}^{(1,it)} \odot \boldsymbol{V}^{(3,it-1)}$
  $\boldsymbol{V}^{(2,it)} := \boldsymbol{T}^{(2)}\, \boldsymbol{W}^{(2,it)} (\boldsymbol{W}^{(2,it)\mathsf{T}}\, \boldsymbol{W}^{(2,it)})^{-1}$
  $\boldsymbol{W}^{(3,it)} := \boldsymbol{V}^{(2,it)} \odot \boldsymbol{V}^{(1,it)}$
  $\boldsymbol{V}^{(3,it)} := \boldsymbol{T}^{(3)}\, \boldsymbol{W}^{(3,it)} (\boldsymbol{W}^{(3,it)\mathsf{T}}\, \boldsymbol{W}^{(3,it)})^{-1}$
end while
$\boldsymbol{U}^{(1)} := \boldsymbol{V}^{(1,it)}$
$\boldsymbol{U}^{(2)} := \boldsymbol{V}^{(2,it)}$
$\boldsymbol{U}^{(3)} := \boldsymbol{V}^{(3,it)}$

2.2 Manipulations

Nous allons maintenant implémenter la fonction "als" et l'évaluer.

- Créez un programme principal nommé "tp1" dans lequel vous commencerez par écrire les commandes permettant d'effacer l'espace mémoire de MATLAB, de fermer l'ensemble des figures et de nettoyer la fenêtre d'invitation de commande de MATLAB.

- Ecrire dans un second temps une section où vous déclarerez toutes les variables globales du programme. Parmi elles vous choisirez comme rang et dimensions du tableau $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ les valeurs $P = 2$ et $N_1 = N_2 = N_3 = N = 3$.

- Créez ensuite une section où seront générées les données pour permettant d'évaluer la fonction "als". En particulier, générez les trois matrices $\boldsymbol{U}^{(1)}$, $\boldsymbol{U}^{(2)}$ et $\boldsymbol{U}^{(3)}$ et le tableau $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ correspondant à l'aide de la formule (1).

- Implémenter la fonction "deplier" qui prendra en entrée un tableau d'ordre trois et fournira en sortie les trois matrices de dépliement de ce dernier. Vous pourrez comparer deux implémentations en termes de temps CPU pour différentes valeurs de N : la première à l'aide de trois boucles emboitées, la seconde (sans boucle) basée sur l'utilisation des fonctions "reshape" et "permute" de MATLAB.

- Implémenter la fonction "khatrirao" qui prendra en entrée deux matrices et fournira en sortie le produit de Khatri-Rao de ces dernières. Vous appliquerez ensuite la fonction "deplier" au tableau $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ généré précédemment afin de construire les matrices $\boldsymbol{T}^{(1)}$, $\boldsymbol{T}^{(2)}$ et $\boldsymbol{T}^{(3)}$. A l'aide de votre fonction "khatrirao", vous vérifierez alors les formules (3). Ceci vous permettra d'évaluer votre implémentation de la fonction "khatrirao".

- Implémenter la fonction "mesure" qui prendra en entrée un tableau d'ordre trois, ses trois matrices de facteur ainsi que leur estimée et fournira en sortie la valeurs des fonctions $f^{(1)}$ et ψ (4).

- Implémenter la fonction "als" qui prendra en entrée un tableau d'ordre trois, un nombre entier et une valeur proche de zéro qui serviront tous deux de critère d'arrêt à l'algorithme ALS, et fournira en sortie une estimée des trois matrices de facteur du dit tableau.

La dernière partie du TP consiste à étudier les performances de l'ALS en présence de bruit en fonction du Rapport Signal à Bruit (RSB). En d'autres termes, nous allons évaluer la capacité de l'ALS à approximer un tableau $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ d'ordre trois par un modèle de décomposition CP de rang P :

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \sigma \boldsymbol{\mathcal{T}}/||\boldsymbol{\mathcal{T}}||_F + \boldsymbol{\mathcal{B}}/||\boldsymbol{\mathcal{B}}||_F \tag{8}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ suit exactement le modèle (1), où $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ est un tableau d'ordre trois représentant l'erreur de modélisation et où σ est un nombre réel positif permettant de régler le niveau d'erreur. Le RSB sera alors définit par $RSB = 20 \log_{10}(\sigma)$.

- Représenter graphiquement en fonction du RSB l'erreur d'estimation ψ (4) moyenne calculée en appliquant successivement l'ALS à $M = 10$ tableaux $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ construits à l'aide des équations (1) et (8) où les trois matrices de facteurs et le bruit $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ seront retirées aléatoirement pour chacun des M tableaux $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ suivant la loi Normale centrée réduite.