

TP d'Introduction au Filtrage Numérique

Ce TP correspond à l'expérimentation des méthodes de synthèse de filtres discrets. Le travail à effectuer est découpé en trois parties correspondant chacune à une méthode particulière de filtrage numérique.

1 Synthèse de filtres MA (RIF) par coefficients de Fourier

a) Ecrire une fonction « *filtreMA* » qui selon la valeur du paramètre d'entrée « *choix* » permet de générer un vecteur correspondant à l'un des trois types classiques de filtres dont les réponses impulsionnelles idéales $\{g[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (obtenues par développement de Fourier du gabarit) sont données dans le tableau 1.

Types de filtre ($ f \leq 1/2$)	Réponses Impulsionnelles de durée Infinie (RII)	
Passe bas ($ f \leq B$)	$\forall n \in \mathbb{Z}^*, g[n] = \frac{\sin(2\pi n B)}{\pi n}$	$g[0] = 2B$
Passe haut ($B \leq f \leq 1/2$)	$\forall n \in \mathbb{Z}^*, g[n] = \delta[n] - \frac{\sin(2\pi n B)}{\pi n}$	$g[0] = 1 - 2B$
Passe bande ($B_1 \leq f \leq B_2$)	$\forall n \in \mathbb{Z}^*, g[n] = \frac{\sin(2\pi n B_2)}{\pi n} - \frac{\sin(2\pi n B_1)}{\pi n}$	$g[0] = 2(B_2 - B_1)$

Tableau 1 : Réponse impulsionnelle de filtres classiques

Rappelons qu'ici $\{g[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est toujours paire (gabarit pair et réel) et que pour obtenir une réponse impulsionnelle $\{h[n]\}$ causale, à phase linéaire, et de durée finie N impaire nous pouvons prendre :

$$\forall n \in \{0, \dots, N-1\}, \quad h[n] = g[n - (N-1)/2] \quad (1.1)$$

Notons que la fonction « *filtreMA* » prendra en entrée deux autres arguments, « N » et « *ham* », où « N » sera choisi impair et où « *ham* » prendra la valeur 1 lorsque l'on souhaite pondérer la réponse impulsionnelle $\{h[n]\}$ par les coefficients d'une fenêtre de Hamming.

b) Visualiser les réponses en fréquence des trois filtres construits à partir de la fonction « *filtreMA* » i) pour N valant 15, 31 puis 61, ii) avec et sans l'utilisation de la fenêtre de Hamming. Bien que l'utilisation d'une fenêtre de pondération conduise à augmenter l'erreur quadratique moyenne entre le gain du filtre construit et celui du filtre désiré, quelle phénomène cette utilisation permet-elle cependant d'atténuer ?

c) Appliquer, à l'aide de la fonction « *conv* » de Matlab, les trois types de filtres au signal $\{X[n]\}_{n \in \{0,1,\dots,M-1\}}$ défini ci-dessous :

$$\forall n \in \{0, 1, \dots, M\}, \quad X[n] = 2 \sin\left(2\pi \frac{4n}{M}\right) + 4 \sin\left(2\pi \frac{20.5\pi n}{M}\right) + 2 \sin\left(2\pi \frac{40\pi n}{M}\right) \quad (1.2)$$

Discuter alors les formes du signal généré en sortie des trois filtres.

2 Synthèse heuristique d'un filtre ARMA

a) Construire à l'aide de la fonction « *filter* » de Matlab le filtre dont la fonction de transfert en Z est donnée par :

$$H(Z) = \frac{1}{(Z-p)(Z-p^*)}, \quad p = \rho e^{i\theta} \quad (1.3)$$

On prendra comme valeurs $\rho = 0.95$ et $\theta = 2\pi/8$. Vérifier que le module du gain généré par ce procédé atteint deux maxima approximativement égaux à $1/(2\rho(1-\rho)\sin(\theta))$ aux fréquences $\pm\theta/(2\pi)$. Remarquons qu'il est possible de construire un filtre passe-bande à bande plus large en introduisant 2 (ou 3) paires de pôles conjugués placés à des fréquences voisines.

b) Puis, rajouter à la fonction de transfert précédente deux zéros, l'un en $Z = 1$ et l'autre en $Z = -1$. Visualiser le module du gain associé à ce nouveau filtre. Quelle est la contribution des deux zéros ?

c) Appliquer le filtre précédent au signal $\{X[n]\}$ défini ci-dessus à partir de trois sinusoïdes en prenant l'une des fréquences égale à la fréquence $\theta/(2\pi)$. Cette dernière est approximativement égale à la fréquence de résonance¹ du filtre. La sortie du filtre peut être obtenue de trois manières distinctes : i) en déduisant de l'expression de la fonction de transfert du filtre une relation de récurrence liant le signal d'entrée au signal de sortie du filtre ; ii) en utilisant une seule fois la fonction « filter » de Matlab ; iii) en utilisant deux fois consécutive la fonction « filter » et en se rappelant qu'un produit de fonctions de transfert correspond dans le domaine temporel au produit de convolution des réponses impulsionnelles associées. La dernière méthode présente l'avantage de ne pas nécessiter le développement des polynômes en Z^{-1} de la fonction de transfert du filtre.

3 Synthèse d'un ARMA à partir d'un filtre analogique

Nous allons dans cette partie construire un filtre numérique passe bande présentant une fréquence de résonance dans l'intervalle $[0, 1/2[$ (i.e. unimodalité du module de la réponse en fréquence), approximée ici par la fréquence caractéristique $f_{r,N}$, et ce à partir du filtre analogique respectant des contraintes de gabarit obtenues par transposition du domaine fréquentiel numérique vers le domaine fréquentiel analogique. Introduisons en conséquence le filtre analogique passe bande de fréquence de résonance $f_{r,A}$ proche de la fréquence caractéristique $f_{0,A}$ pour ξ petit et défini par la fonction de transfert de Laplace suivante :

$$H(p) = \frac{p}{1 + \frac{\xi}{\pi f_{0,A}} p + \frac{1}{4\pi^2 f_{0,A}^2} p^2} \quad (1.4)$$

Il est possible d'obtenir le filtre numérique passe bande souhaité à partir du filtre analogique précédent en posant $f_{r,A} = \tan(\pi f_{r,N}) / (2\pi)$ et $p = (1-Z^{-1}) / (1+Z^{-1})$, ce qui nous donne, en tenant compte de $f_{0,A} \approx f_{r,A}$ après simplification :

$$\frac{1+Z^{-2}}{1+\alpha+\beta+2(1-\beta)Z^{-1}+(1-\alpha+\beta)Z^{-2}} \quad (1.5)$$

où $\alpha = \xi / \pi f_{0,A}$ et $\beta = 1 / (2\pi f_{0,A})^2$.

Implémenter le filtre numérique à l'aide de la méthode décrite ci-dessus, dite de la *transformée bilinéaire*, pour $f_{r,N} = 1/8$ et $\xi = 0,7$. Vérifier que le gabarit du filtre construit est bien celui souhaité. Puis on fera varier la valeur de ξ dans l'intervalle $[0,1]$ afin d'en déduire expérimentalement son rôle.

¹ La fréquence de résonance d'un filtre est la fréquence positive pour laquelle le module du gain du filtre atteint son maximum.