TD 2 d'Analyse Multimodale de Signaux Biomédicaux

ESIR 2 option Ingénierie Biomédicale

Université de Rennes1

Exercice 1 (décomposition CP et dépliement matriciel)

Soit $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ un tableau d'ordre trois de taille $(N_1 \times N_2 \times N_3)$ et soit $\boldsymbol{T}^{(1)}$ l'une des matrices de dépliement de $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, de taille $(N_1 \times N_2N_3)$ dont les composantes sont définies par :

$$T^{(1)}_{n_1,n_3+N_3(n_2-1)} = \mathcal{T}_{n_1,n_2,n_3}$$

Considérons $\boldsymbol{U}^{(1)}$, $\boldsymbol{U}^{(2)}$ et $\boldsymbol{U}^{(3)}$ trois matrices, de tailles respectives $(N_1 \times P)$, $(N_2 \times P)$ et $(N_3 \times P)$, vérifiant :

$$\boldsymbol{T}^{(1)} = \boldsymbol{U}^{(1)}\,(\boldsymbol{U}^{(3)} \odot \boldsymbol{U}^{(2)})^{\mathsf{T}}$$

où $\odot$ est l'opérateur du produit de Khatri-Rao. Montrer que $\boldsymbol{U}^{(1)}$, $\boldsymbol{U}^{(2)}$ et $\boldsymbol{U}^{(3)}$ sont trois matrices de facteurs associées à la décomposition Canonique Polyadique (CP) du tableau $\boldsymbol{\mathcal{T}}$. Autrement dit, montrer que l'on a :

$$\mathcal{T}_{n_1,n_2,n_3} = \sum_{p=1}^{P} U^{(1)}_{n_1,p}\,U^{(2)}_{n_2,p}\,U^{(3)}_{n_3,p}$$

Exercice 2 (SVD)

Soit $\boldsymbol{x}[m] = [x_1[m], ..., x_N[m]]^{\mathsf{T}}$ le vecteur de N mesures EEG acquises à l'instant $t = mT_e$ où T_e est la période d'échantillonnage. La premiére étape de la méthode de localisation décrite en cours consiste à calculer la transformée de Fourier à court terme (discréte dans le cas présent), $\mathcal{S}_{x_n}$, de chaque signal $\{x_n[m]\}$ pour n appartenant à $\{1, 2, ..., N\}$:

$$\mathcal{S}_{x_n}[\ell, k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_n[m]g[m-\ell]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi mk}$$

Notons $\boldsymbol{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_{n,\ell,k})$ le tableau d'ordre 3 dont la (n, ℓ, k)-iéme composante est définie par $\mathcal{T}_{n,\ell,k} = \mathcal{S}_{x_n}[\ell, k]$. De même, notons $\boldsymbol{a} = [a_1, ..., a_N]^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{b} = [b_1, ..., b_L]^{\mathsf{T}}$ et $\boldsymbol{c} = [c_1, ..., c_K]^{\mathsf{T}}$ trois vecteurs colonnes de longueurs respectives N, L et K. Supposons à présent que l'activité EEG $\{x_n[m]\}$ ne soit due qu'à l'activité d'un seul dipôle électrique (i.e. absence d'activité de fond, d'artefacts physiologiques et de bruit d'instrumentation).

1. A quelle condition sur le signal $\{s[m]\}$ représentant l'activité du dit dipôle électrique, la composante $\mathcal{T}_{n,\ell,k}$ du tableau $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ peut-elle s'écrire sous la forme $\mathcal{T}_{n,\ell,k} = a_n\, b_\ell\, c_k$? Que représente (physiquement parlant) le vecteur $\boldsymbol{a}$?

2. Supposons la condition précédente remplie, sous quelle forme faisant intervenir les vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ peut-on écrire la matrice de dépliement $\boldsymbol{T}^{(1)}$ du tableau $\boldsymbol{\mathcal{T}}$?

3. Quel est le rang de la matrice $\boldsymbol{T}^{(1)}$?

4. Comment peut-on calculer le vecteur $\boldsymbol{a}$ (à une constante multiplicative prés) à partir de la matrice $\boldsymbol{T}^{(1)}$?

5. A titre d'exemple, considérons le cas particulier $(N, L, K) = (3, 2, 2)$ pour lequel seules trois mesures EEG sont exploitées et la matrice suivante :

$$\boldsymbol{T}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ se déduisent aisément de $\boldsymbol{T}^{(1)}$. Retrouver le vecteur $\boldsymbol{a}$ en employant la technique attendue à la question précédente.

Exercice 3 (ALS)

Lorsque le rang du tableau $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ d'ordre 3 est strictement supérieur à un, induit par un nombre de dipôles électriques d'intérêt strictement supérieur à un, la technique présentée dans l'exercice 2 ne permet plus d'identifier les trois matrices de facteurs $\boldsymbol{U}^{(1)}$, $\boldsymbol{U}^{(2)}$ et $\boldsymbol{U}^{(3)}$ de la décomposition CP de $\boldsymbol{\mathcal{T}}$. On peut alors utiliser l'algorithme ALS (Alternating Least Squares) dont la première étape consiste à minimiser par rapport à $\boldsymbol{U}$ la fonction f définie par :

$$f(\boldsymbol{U}) = \left\| \boldsymbol{T}^{(1)} - \boldsymbol{U}\,(\boldsymbol{V} \odot \boldsymbol{W})^{\mathsf{T}} \right\|_{\mathrm{F}}^2$$

où $\|\boldsymbol{C}\|_{\mathrm{F}}^2$ désigne la norme de Frobenius au carré définie par $\|\boldsymbol{C}\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_i \sum_j (C_{i,j})^2$. Cet exercice vise à montrer qu'il existe une solution exacte à ce problème de minimisation. Pour cela, simplifions le problème et posons $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{V} \odot \boldsymbol{W}$. La fonction f est alors définie par $f(\boldsymbol{U}) = \|\boldsymbol{T} - \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}\|_{\mathrm{F}}^2$. Déterminer alors la matrice $\boldsymbol{U}^{(o)}$ pour laquelle la fonction f est minimale. On rappelle que la composante $C_{i,j}$ de la matrice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{E}$ est égale à $C_{i,j} = \sum_k D_{i,k}\, E_{k,j}$. On rappelle également que la composante (i, j) de la matrice $\boldsymbol{C}^{\mathsf{T}}$ est $C_{j,i}$. On exprimera $\boldsymbol{U}^{(o)}$ en fonction des matrices $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{Z}$, c'est-à-dire qu'on ne s'arrètera pas à une formulation de la composante (m, n) de la matrice $\boldsymbol{U}^{(o)}$ mais bien à une formulation matricielle de $\boldsymbol{U}^{(o)}$ de la forme $\boldsymbol{U}^{(o)} = g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{Z})$ où g sera une fonction à définir.