TD 1 d'Analyse Multimodale de Signaux Biomédicaux

ESIR 2 option Ingénierie Biomédicale

Université de Rennes1

Exercice 1 (TF à court terme)

Soit $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on considère la famille des translatés temporellement et modulés en amplitude (on dit aussi translatés fréquentiellement) de g, notée $\{g_{\nu,b}(t) = g(t-b)\,\mathsf{e}^{i2\pi\nu t}, (\nu,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Cette dernière est plus connue sous le nom de fenêtre de Weyl-Heisenberg et nous permet de définir la Transformée de Fourier (TF) à court terme de la fonction s, notée S_s :

$$\forall\,(\nu,b) \in \mathbb{R}^2, \quad S_s(\nu,b) = \mathrm{TF}\left\{s(t)\,g(t-b)^*\right\}(\nu)$$

Démontrer que S_s vérifie également l'équation suivante (on s'aidera de la relation de Parseval-Plancherel) :

$$\forall\,(\nu,b) \in \mathbb{R}^2, \quad S_s(\nu,b) = \mathsf{e}^{-i2\pi\nu b}\ \mathrm{TF}^{-1}\left\{\hat{s}(f)\,\hat{g}(f-\nu)^*\right\}(b)$$

Exercice 2 (Transformée en ondelettes)

En supposant $\bar{t}_\psi = 0$, calculer les quantités $\bar{t}_{\psi_{\alpha,b}}$, $\Delta t_{\psi_{\alpha,b}}$, $\bar{\nu}_{\psi_{\alpha,b}}$ et $\Delta\nu_{\psi_{\alpha,b}}$ en fonction de b, α, $\bar{\nu}_\psi$, Δt_ψ et $\Delta\nu_\psi$ pour $(\alpha,b) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^+$ (indication : penser à faire un changement de variable approprié). Montrer que plus la position fréquentielle moyenne du phénomène observé est haute, meilleure est la localisation temporelle.

Exercice 3 (Principe d'incertitude d'Heisenberg)

Soit ϕ une fonction de norme unité et de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\psi : t \mapsto t\phi(t)$ et ϕ' appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$ et telle que ψ soit à support compact.

1. Démontrer que les incertitudes temporelle et fréquentielle de la fonction ϕ sont liées par l'inégalité $\Delta t_\phi\,\Delta f_\phi \geq \frac{1}{4\pi}$.
2. Démontrer que l'inégalité est atteinte si et seulement la fenêtre est une gaussienne, i.e. une fonction de la forme $\phi : t \mapsto \alpha\,\mathsf{e}^{\imath\xi t}\,\mathsf{e}^{-\beta(t-m)}$ où $(m,\xi,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$.
3. Calculer les incertitudes temporelle et fréquentielle d'une fenêtre gaussienne (indication : on commencera par le calcul de l'incertitude temporelle, on supposera connu la relation entre l'espérance mathématique / la variance et la densité de probabilité $p_x : u \mapsto 1/(\sigma\sqrt{2\pi})\,\mathsf{e}^{-(u-m)^2/(2\sigma^2)}$ d'une variable aléaoire x de loi normale, et on utilisera le résultat de la question précédente pour en déduire l'incertitude fréquentielle).