Préparation de l'examen de Mathématiques (Mat0)

DIIC 1^{ere} année (2007-2008)

DIPLOME D'INGENIEUR DE L'IFSIC DE L'UNIVERSITE DE RENNES 1

Section Analyse

Exercice 1.

Calculer :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad \forall\,(a,b)\in\ {}^2, \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

Exercice 2.

Montrer, sans calcul de dérivée (utiliser les identités remarquables), que pour tout $x\in[-1/3,1/3]$ on a :

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}\geq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}\leq\sqrt{1+x}-1\leq\frac{x}{2}$$

Puis, calculer la limite de $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ quand x tend vers zéro.

Exercice 3.

Soit f une fonction de dans de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0)=0$. Calculer la limite de $\left(f(x)+f(-x)\right)/x^2$ quand x tend vers zéro.

Exercice 4.

Etudier la nature de la série numérique de terme général $U_n=\sin\left(\pi\left(\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)\right)$.

Exercice 5.

Calculer l'intégrale suivante pour des valeurs de a et b strictement positives, et β appartenant à :

$$I=\int_a^b\frac{1}{(x^2+\beta)}\,dx$$

Exercice 6.

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^\alpha}\,dx \qquad I_2=\int\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi ft}\,dt \text{ où } \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t)=\begin{cases}1 \text{ si } t\in[-1/2,1/2]\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

et calculer leur valeur.

Section Algèbre

Exercice 1.

Soit une matrice A de dimension (m,n) avec $a_{1,1} = 1$. Montrer que si le rang de A vaut 1 alors il existe un couple de vecteurs (colonnes) X et Y tel $A = XY^{\intercal}$ avec $x_{1,1} = y_{1,1} = 1$. Ce résultat peut-il être étendu au cas général où $a_{1,1}$ a la possibilité d'être nul ? Justifier la réponse.

Exercice 2.

Soit le système linéaire suivant dépendant d'un paramètre m :

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 4 \\ -x + my + 2z &= 5 \\ 7x + 3y + (m-5)z &= 7 \end{aligned}$$

Donnez le nombre de solutions du système suivant les valeurs de m en justifiant vos réponses.

Exercice 3.

Pour $a \neq 0$, soit la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

i) Calculez les valeurs et vecteurs propres de A.
ii) Donnez une matrice P inversible et la matrice diagonale D associée telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 4.

Soit la matrice U définie par $U = \frac{1}{k}\begin{pmatrix} 3 & -6 & x \\ 6 & 2 & y \\ 2 & 3 & z \end{pmatrix}$. Pour quels quadruplets $\{k, x, y, z\}$, cette matrice est elle orthogonale ? $(U^T U = UU^T = I)$.