

Liste d'exercices de Mathématiques (intégrales généralisées et suites numériques)

Mise à niveau en Mathématiques

Exercice 1.

Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+x+1}}}{\sqrt{x}} dx \quad I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{1+\sin t}{1+\sqrt{t^3}} dt$$

Exercice 2.

Soit $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx$, montrer dans un premier temps que l'intégrale J est convergente et que l'on a $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x)) dx$. Puis montrer que $2J = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) dx$, et en déduire la valeur de J .

Exercice 3.

Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites suivantes :

$$U_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} \quad V_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$
$$W_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 - 1}} \quad Z_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

Exercice 4.

Déterminer la limite des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad V_n = \sqrt[n]{n^2} \quad W_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/n} \quad Z_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

Exercice 5.

Déterminer par comparaison la limite des suites suivantes :

$$U_n = \frac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}} \quad V_n = \frac{n!}{n^n} \quad Z_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n} \quad W_n = \frac{e^n}{n^n}$$