Liste d'exercices de Mathématiques

Intégrale de Lebesgue

Exercice 1.

Montrer que la fonction f définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)/x$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2.

Montrer que la fonction Γ définie de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{\lambda-1}$$

est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 3.

Déterminer la limite de la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, I_k = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x/k)}{(1+x)^2} dx$$

quand k tend vers $+\infty$.

Exercice 4.

Soit g la fonction définie de $]0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

Démontrer que $g(x) = \pi/2 - x/2$ pour tout x appartenant à $]0, 2\pi[$.
Pour cela :
1. Considérons l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - e^{ix} t} dt$$

Montrer alors que $\mathfrak{Im}(J) = g$.
2. En déduire l'égalité demandée. On pourra utiliser les relations suivantes :

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad \text{et} \quad -\frac{\cos x}{\sin x} = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 5.

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n dx$$

Exercice 6.

Démontrer que la suite (K_n) des intégrales suivantes :

$$K_n=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt$$

converge vers $\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt$. En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt=-\gamma$, où $\gamma=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)$ est la constante d'Euler.

Exercice 7.

On considère la suite $(L_n)_{k\in\mathbb{N}}$ des intégrales suivantes :

$$L_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n\,dx$$

1. Calculer L_0 et L_1. Démontrer que L_n tend vers 0 en décroissant.
2. Donner une relation de récurrence sur les L_n en intégrant par parties. En déduire que $L_n\sim L_{n-1}$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Calculer L_nL_{n-1}. Montrer que $L_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la suite (h_n) de fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$h_n(x)=\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n 1_{[0,\sqrt{n}]}(x)$$

i.e. :

$$h_n(x)=\begin{cases}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } 0\le x\le\sqrt{n}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. Trouver vers quelle fonction converge simplement la suite de fonctions (h_n) sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^+$ et tout $x\ge 0$ on a $h_n(x)\le e^{-x^2}$ (on rappelle que $\ln(x)\le x-1$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^{+*}$.)
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ en utilisant la dernière question de l'exercice précédent.