Liste d'exercices de Mathématiques

Espaces et suites de fonctions

Exercice 1.

On considère $C([0, 1])$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0, 1]$.

1. Montrer que pour tout $f \in C([0, 1])$, $\int_0^1 |f(x)| dx$ définit une norme sur $C([0, 1])$;
2. On considère la suite de fonctions suivante :

$$f_n = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n^2}] \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in [\frac{1}{n^2}, 1] \end{cases}$$

f_n est-elle de Cauchy ? L'espace $C([0, 1])$ est-il complet ?

Exercice 2.

Etudier en terme de convergence simple et uniforme les suites de fonctions définies par :

1. $f_n(x) = e^{-nx}$ pour tous $x \in [0, 1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$;
2. $g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$ pour tous $x \in [0, 1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$;
3. $h_n(x) = e^{-nx} \sin(x)$ pour tous $x \in [0, +\infty[$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.

Etudier en terme de convergence simple et uniforme les suites de fonctions définies par :

1. $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in [0, 1]$;
2. $g_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
3. $h_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
4. $i_n(x) = n^3xe^{-n^2x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
5. $j_n(x) = \sin(x + \frac{1}{n})$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 4.

Déterminer si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses. On donnera une démonstration complète dans le premier cas et un contre-exemple dans le deuxième cas. Les fonctions f_n (non nécessairement

continues) sont définies sur un intervalle I .

1. Si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si f est bornée sur I , alors chaque f_n est bornée sur I . (On rappelle que f est bornée sur I si et seulement si il existe $B > 0$ tel que, pour tout x de I on ait $|f(x)| < B$);
2. Si (f_n) et (g_n) convergent uniformément respectivement vers f et g sur I , alors $(f_n + g_n)$ converge uniformément vers $f + g$ sur I ;
3. Si (f_n) et (g_n) convergent uniformément respectivement vers f et g sur I , alors $(f_n g_n)$ converge uniformément vers $f g$ sur I ;
4. Si (f_n) converge uniformément sur $[a, b[$ et si la suite numérique $(f_n(b))$ est convergente, alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$.

Exercice 5.

Soit $C^1([0, 1])$ l'espace des fonctions continues et dérivables à dérivées continues sur $[0, 1]$. Soient f et g deux fonctions de $C^1([0, 1])$, on pose $\varphi = \int_0^1 f'(x) g'(x) dx + f(0) g(0)$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $C^1([0, 1])$;
2. Déterminer trois polynômes P_n de degré n ($n = 0, 1, 2$) formant une famille orthonormée pour le produit scalaire ci-dessus. Cette famille est-elle orthonormée pour le produit scalaire usuel de $L^2([0, 1])$.

Exercice 6.

On considère l'espace de fonctions E défini par $C([0, 1]) \cap L^2([0, 1])$ avec pour norme associée celle de $L^2([0, 1])$. Montrer à l'aide de la suite de fonction suivante que E n'est pas complet :

$$f_n = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n^3}] \\ x^{-1/3} & \text{si } x \in [\frac{1}{n^3}, 1] \end{cases}$$