Prénom :

Nom :

Note : /10

Université de Rennes 1 – L.T.S.I.
Licence 3 d'électronique
Année 2007–2008

Examen de TP de Génie Informatique (Initiation à MATLAB)

(aucun document n'est autorisé – durée : 1 heure)

Dans les applications pratiques, on rencontre des variables aléatoires réparties suivant une loi particulière, dite *loi de Poisson*. Considérons la variable discrète X pouvant prendre seulement des valeurs entières non négatives : 0, 1, 2, 3, …, m, … , la suite de ces valeurs n'ayant pas de limite théorique. La loi de cette variable aléatoire X est donnée par la formule : $P(X=m) = a^m e^{-a}/m!$ pour tout entier naturel m, où a est une certaine grandeur positive appelée *paramètre de la loi de Poisson*. Notons x le vecteur ligne de N réalisations indépendantes de la variable X que l'on suppose pouvoir facilement construire sous Matlab.

Ecrire la ligne de commande permettant d'estimer sous Matlab l'espérance mathématique de X à partir du vecteur x. On notera mX cette estimée. [/1.5]

```
mX = sum(x)/N;
```

Ecrire la ou les lignes de commande permettant d'estimer sous Matlab la variance de X à partir du vecteur x et de l'estimée de l'espérance mathématique de X, notée mX dans la question précédente. On notera VarX l'estimée de cette variance. [/1.5]

```
VarX = x*x'/(N-1) - abs(mX)^2;
```

On rappelle qu'une suite de probabilité ($P(X=m)$) définit une loi de probabilité si la somme de toutes les probabilités $P(X=m)$ sur $m\in\mathbb{N}$ est égale à 1. Par ailleurs, nous avons l'égalité : $\forall z\in\mathbb{R}, \sum_{m\in\mathbb{N}} z^m/m! = e^z$.

Vérifier que la suite de probabilité (P(X=m)) donnée par $P(X=m) = a^m e^{-a}/m!$ définit une loi de probabilité. [/1]

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} P(X=m) = \sum_{m\in\mathbb{N}} a^m.e^{-a}/m! = e^{-a}\underbrace{\sum_{m\in\mathbb{N}} a^m/m!}_{e^a \text{ d'après}}$$

$$= e^{-a+a} = 1.$$

Calculer l'espérance théorique de X (on aura à effectuer le changement de variable k=m–1 dans la somme à calculer après avoir observé que m/m!=1/(m–1)! et que le premier terme de la somme est nul). [/1]

$$E[X] = \sum_{m\in\mathbb{N}} m.P(X=m) = \sum_{m\in\mathbb{N}} m.a^m.e^{-a}/m! = e^{-a}.\sum_{m\in\mathbb{N}} m.a^m/m!$$

$$= e^{-a}\sum_{m\in\mathbb{N}^*} m.a^m/m! \text{ car le premier terme de la somme correspondant à } m=0 \text{ est nul.}$$

$$= e^{-a}\sum_{m\in\mathbb{N}^*} a^m/(m-1)! = e^{-a}.a.\sum_{m\in\mathbb{N}^*} a^{m-1}/(m-1)!$$

$$= a.e^{-a}\sum_{k=0}^{+\infty} a^k/k! = a.e^{-a}.e^a = \boxed{a = E[X]}$$

$k=m-1$

On peut également montrer que la variance de X est égale à son espérance mathématique. Cette propriété de la loi de Poisson est souvent utilisée dans les applications pratiques quand il y a lieu d'établir la vraisemblance de l'hypothèse suivant laquelle la variable aléatoire X suit la loi de Poisson. En effet, en pratique une nette différence entre mX et $VarX$ permet de rejeter l'hypothèse selon laquelle X suit une loi de Poisson.

On considère à présent une variable aléatoire continue Y de densité de probabilité définie par $p_Y(t)= t/4$ si $t\in[0,2]$, $p_Y(t)=1- t/4$ si $t\in]2,4]$ et $p_Y(t)=0$ sinon. On rappelle que la fonction de répartition F_Y qui à tout u de $\mathbb{R}$ associe la probabilité $P(Y<u)$ est définie comme l'intégrale de $-\infty$ à u de la densité p_Y.

Calculer la fonction de répartition F_Y de Y. Pour cela, on calculera d'abord $F_Y(u)$ pour $u<0$, puis pour $u\in[0,2]$, ensuite pour $u\in]2,4]$ et enfin pour $u>4$. [/2]

$\forall u<0,\ F_Y(u)=0.$

$\forall u\in[0,2],\ F_Y(u)=\int_0^u t/4 . dt = u^2/8.$

$\forall u\in]2,4],\ F_Y(u)=\int_0^2 t/4 . dt + \int_2^u (1-t/4) . dt = \frac{1}{2} + [t - t^2/8]_2^u = u - \frac{u^2}{8} - 1$

$\forall u>4,\ F_Y(u)=\int_0^2 t/4 . dt + \int_2^4 (1-t/4) . dt = 1.$

Comme il a été démontré en TP, la méthode d'inversion permet de générer des réalisations d'une variable aléatoire de loi donnée.

Donner l'expression d'une réalisation y1 de la variable Y en fonction de F_Y et d'une réalisation z d'une variable aléatoire de loi uniforme sur [0,1]. [/2]

$y1 = F_Y^{-1}(z)$ où F_Y^{-1} est l'application réciproque de F_Y.

Donner la ligne de commande Matlab qui permet de programmer un vecteur ligne z de N réalisations d'une variable aléatoire de loi uniforme sur [0,1]. [/1]

```
z = rand(1,N);
```

La mise en œuvre de la méthode d'inversion nécessite de calculer analytiquement une application de [0,1] dans $\mathbb{R}$ et ce à partir de la fonction F_Y.

(Question bonus) Déterminer l'application précédente et donner le programme Matlab permettant de générer le vecteur ligne y de N réalisations de Y. [/2]

La fonction p_Y est strictement positive sur $]0,4[$, par conséquent F_Y est strictement croissante sur $]0,4[$ (rappelons que p_Y est la dérivée de F_Y) et donc bijective sur $]0,4[$. F_Y admet donc une application réciproque sur $]0,4[$ que l'on notera F_Y^{-1}. Déterminons cette application réciproque sur $]0,4[$: