

Prénom :

Nom :

Note : / 20

Examen de TP de Génie Informatique

(aucun document n'est autorisé)

Considérons la suite de variables aléatoires (v.a.) $\{Z_k\}_{k \geq 0}$ mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que pour tout entier naturel k , on a $P(Z_k = -1) = P(Z_k = 1)$.

Ecrire la ligne de commande permettant de générer sous Matlab N échantillons d'une suite de v.a. i.i.d. (indépendamment et identiquement distribuées) de loi uniforme sur $[0, 1]$. On stockera ces échantillons dans le vecteur ligne X . [/2]

$X = \text{rand}(1, N)$;

Nous allons à présent détailler deux manières de générer N échantillons de $\{Z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ à partir des échantillons stockés dans X . Ces deux méthodes supposent implicitement que la probabilité pour le vecteur X d'avoir une ou plusieurs composantes égales à 1 est négligeable.

Méthode 1 : cette méthode requiert l'utilisation de la fonction $\text{floor}(\cdot)$ de Matlab renvoyant la partie entière inférieure. Soit Y un vecteur construit à partir de X dont chaque composante appartient à l'ensemble $\{0, 1\}$. Par définition, la n -ième composante de Y sera égale à 0 lorsque la n -ième composante de X sera supérieure à 0 et strictement inférieure à $1/2$. Sinon, elle sera égale à un.

Ecrire la ligne de commande permettant de générer le vecteur ligne Y à partir du vecteur X et faisant intervenir la fonction $\text{floor}(\cdot)$. [/3]

$Y = \text{floor}(2 * X)$;

Soit Z un vecteur réalisation de N échantillons de $\{Z_k\}_{k \geq 0}$ construit à partir du vecteur Y .

Ecrire la ligne de commande permettant de générer Z à partir de Y . [/2]

$Z = 2 * Y - 1$;

Méthode 2 : cette méthode ne fait pas intervenir la fonction « partie entière ». Par contre, elle utilise la notion de booléen. On désignera par Z le vecteur ligne de N échantillons de $\{Z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ construit à partir de X .

Cocher la case associée aux instructions Matlab permettant de générer Z à partir de X . [/3]

$Z = (X \geq 1/2) - (X < 1/2)$;

if $X \geq 1/2$
 $Z = 1$;
 else
 $Z = -1$;
 end

for $n = 0 : N$
 if $X(n) < 1/2$, $Z(n) = -1$;
 else, $Z(n) = 1$;
 end

end

Nous allons à présent vérifier que les moments théoriques d'ordre 1 et 2 (autrement dit l'espérance et la variance) pour la loi (commune) des v.a. Z_k , correspondent bien à ceux estimés à partir du vecteur Z simulé.

Calculer l'espérance et la variance théorique de $\{Z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (ne pas détailler le calcul). [/2]

$$\forall k \in \mathbb{N}, E[Z_k] = -1 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{Var}(Z_k) = (-1)^2 \cdot 1/2 + 1^2 \cdot 1/2 - 0^2 = 1$$

$E[Z_k]$ peut être estimée à partir des N échantillons simulés de Z par la quantité $E_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z(n)$ où $Z(n)$ désigne la n -ième composante du vecteur Z .

Ecrire sous Matlab le code permettant de calculer la quantité E_z définie ci-dessus. On pourra au choix, soit utiliser la fonction `sum(.)` de Matlab, soit faire une boucle `for`. [/3]

```
Ez = sum(Z) / N ;   ou   Ez = 0 ;  
                        for n = 1 : N  
                          Ez = Ez + Z(n)/N ;  
                        end
```

La variance de $\{Z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est quant à elle estimée ici par la quantité $V_z = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [Z(n) - E_z]^2$.

Ecrire sous Matlab le code permettant de calculer la quantité V_z définie ci-dessus. On pourra au choix, soit utiliser la fonction `sum(.)` de Matlab, soit faire une boucle `for`, soit utiliser la notion de produit scalaire. [/3]

```
Vz = sum((Z - Ez).^2) / (N - 1) ;   ou   Vz = 0 ;           ou   Zc = Z - Ez ;  
                                          Zc = Z - Ez ;           Vz = Zc* Zc.' / (N - 1) ;  
                                          for n = 1 : N  
                                            Vz = Vz + (Zc(n)^2) / (N - 1) ;  
                                          end
```

Enfin, nous avons vu lors de la première séance de TP qu'il était possible de visualiser, autrement dit d'estimer sous Matlab à un facteur d'échelle près la densité de probabilité d'une v.a. à partir de N de ses réalisations.

Quelle fonction sous Matlab permet d'obtenir cette estimée ? [/2]

Il s'agit de la fonction `hist(.)`.