

Distributions

Exercice n° 1 :

Propriété : (de changement d'échelle)

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{D}, \text{ on a : } \langle T_f(ax), \varphi(x) \rangle = \cancel{|a|^{-1} \langle T_f(x), \varphi(\frac{x}{a}) \rangle} \\ |a|^{-1} \langle T_f(x), \varphi(\frac{x}{a}) \rangle$$

Démo. : $\langle T_f(ax), \varphi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(ax) \cdot \varphi(x) dx$

$\nearrow = \frac{1}{a} \int_{-\infty \times a}^{+\infty \times a} f(y) \cdot \varphi(\frac{y}{a}) dy$

$y = ax$
 $dy = a dx$

Il faut pour continuer le calcul distinguer le cas où a est positif et le cas où a est négatif. On a :

si $a < 0$:

$$\langle T_f(ax), \varphi(x) \rangle = -\frac{1}{|a|} \int_{+\infty \times |a|}^{-\infty \times |a|} f(y) \cdot \varphi(\frac{y}{a}) dy \quad \boxed{\text{car } a = -|a|}$$

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty \times |a|}^{+\infty \times |a|} f(y) \cdot \varphi(\frac{y}{a}) dy$$

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot \varphi(\frac{y}{a}) dy$$

$$\langle T_f(ax), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T_f(x), \varphi(x/a) \rangle$$

et si $a \geq 0$:

$$\langle T_f(ax), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty \times |a|}^{+\infty \times |a|} f(y) \cdot \varphi(\frac{y}{a}) dy = \frac{1}{|a|} \langle T_f(x), \varphi(x/a) \rangle$$

$\boxed{\text{car } a = |a|}$

$$D'\omega, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \langle T_{\mathbb{F}}(ax), \gamma(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T_{\mathbb{F}}(x), \gamma\left(\frac{x}{a}\right) \rangle$$

CQFD.