Correction d'exercice

Module de Traitement du Signal en Master 1 d'électronique

Laurent Albera - Laboratoire LTSI - UMR INSERM 642 - Université de Rennes1

Exercice 2 de la feuille de TD no. 1 :

Soit Z un signal déterministe à temps continu, Δ-périodique (autrement dit périodique de période Δ) et à valeurs complexes défini par :

$$\forall\, t \in [0, \Delta], \quad Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} A \text{ si } [0, \alpha\Delta] \text{ avec } \alpha \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ du signal Z, notée γ_z et définie par :

$$\gamma_z(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} Z(t) Z(t-\tau)^* dt$$

Solution :

Tout d'abord, et ce d'après le résultat de l'exercice 1, réécrivons la définition de γ_z tenant compte du fait que la fonction $Z : t \longmapsto Z(t)$ (et donc $X : t \longmapsto Z(t)Z(t-\tau)^*$) est Δ-périodique :

$$\gamma_z(\tau) = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} Z(t) Z(t-\tau)^* dt$$

D'autre part, demandons-nous s'il est vraiment nécessaire de calculer la fonction γ_z pour tout nombre réel τ ? La réponse est non car on montre facilement que :

$$\begin{aligned} \gamma_z(\tau + \Delta) &= \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} Z(t) Z(t-\tau-\Delta)^* dt \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} Z(t) Z(t-\tau)^* dt \text{ (car } Z \text{ est } \Delta\text{-périodique)} \\ &= \gamma_z(\tau) \end{aligned}$$

autrement dit, que γ_z est Δ-périodique. Par conséquent il suffit de calculer la fonction γ_z uniquement sur une période, par exemple pour τ appartenant à $]-\Delta/2, \Delta/2\,]$.

Par ailleurs, remarquons la symétrie hermitienne de la fonction γ_z par rapport à 0 :

$$\begin{aligned}
\gamma_z(-\tau) &= \frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} Z(t)Z(t+\tau)^*dt \\
&= \frac{1}{\Delta}\int_{\tau}^{\tau+\Delta} Z(u-\tau)Z(u)^*du \text{ (en posant } u=t+\tau \text{)} \\
&= \frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} Z(u-\tau)Z(u)^*du \text{ (d'après le résultat de l'exercice 1)} \\
&= \left(\frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} Z(u-\tau)^*Z(u)du\right)^* \\
&= \gamma_z(\tau)^*
\end{aligned}$$

De ce fait, nous pouvons juste nous contenter de calculer la fonction γ_z sur la demi-période $[0,\Delta/2]$. Il nous suffira ensuite d'utiliser les propriétés de symétrie hermitienne et de périodicité de γ_z pour en déduire sa valeur sur $\mathbb{R}$ tout entier. Calculons dès lors la fonction γ_z pour τ appartenant à $[0,\Delta/2]$. Nous avons :

$$\gamma_z(\tau)=\frac{1}{\Delta}\int_0^{\alpha\Delta} A\,Z(t-\tau)^*dt \text{ (par définition de } Z \text{ sur l'intervalle } [0,\Delta])$$

Rappelons alors que $Z:t\longmapsto Z(t)$, d'après sa définition, est une fonction (en créneaux) de support $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[k\Delta,k\Delta+\alpha\Delta]$ (rappelons que le support d'une fonction est défini comme l'ensemble des points pour lesquels la fonction est non nulle). On en déduit alors que la fonction $Y:t\longmapsto Z(t-\tau)$ admet pour support $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[k\Delta+\tau,k\Delta+\tau+\alpha\Delta]$. De ce fait, calculer $\gamma_z(\tau)$ revient à intéger la constante $(AA^*)/\Delta=|A|^2/\Delta$ sur $[0,\alpha\Delta]\cap\{\cup_{k\in\mathbb{Z}}[k\Delta+\tau,k\Delta+\tau+\alpha\Delta]\}$. Notons que cette intersection d'intervalles peut se réécrire sous la forme suivante :

$$[0,\alpha\Delta]\cap\{\cup_{k\in\mathbb{Z}}[k\Delta+\tau,k\Delta+\tau+\alpha\Delta]\}=\cup_{k\in\mathbb{Z}}\{[0,\alpha\Delta]\cap[k\Delta+\tau,k\Delta+\tau+\alpha\Delta]\}$$

Or, en considérant d'une part que α est compris entre 0 et 1 et d'autre part que τ est compris entre 0 et $\Delta/2$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\cup_{k\in\mathbb{Z}}\{[0,\alpha\Delta]\cap[k\Delta+\tau,k\Delta+\tau+\alpha\Delta]\}=\ldots\cup\underbrace{\{[0,\alpha\Delta]\cap[-5\Delta+\tau,-5\Delta+\tau+\alpha\Delta]\}}_{\{\emptyset\}} \\
&\cup\underbrace{\{[0,\alpha\Delta]\cap[-4\Delta+\tau,-4\Delta+\tau+\alpha\Delta]\}}_{\{\emptyset\}}\cup\underbrace{\{[0,\alpha\Delta]\cap[-3\Delta+\tau,-3\Delta+\tau+\alpha\Delta]\}}_{\{\emptyset\}}\cup \\
&\underbrace{\{[0,\alpha\Delta]\cap[-2\Delta+\tau,-2\Delta+\tau+\alpha\Delta]\}}_{\{\emptyset\}}\cup\underbrace{\{[0,\alpha\Delta]\cap[-\Delta+\tau,-\Delta+\tau+\alpha\Delta]\}}_{[0,-\Delta+\tau+\alpha\Delta] \text{ si } \{\alpha\geq\frac{1}{2} \text{ et } \tau\geq(1-\alpha)\Delta\},\ \{\emptyset\} \text{ sinon}} \\
&\cup\underbrace{\{[0,\alpha\Delta]\cap[\tau,\tau+\alpha\Delta]\}}_{[\tau,\alpha\Delta] \text{ si } \tau\leq\alpha\Delta,\ \{\emptyset\} \text{ sinon}}\cup\underbrace{\{[0,\alpha\Delta]\cap[\Delta+\tau,\Delta+\tau+\alpha\Delta]\}}_{\{\emptyset\}}\cup\ldots
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc, pour α et τ appartenant respectivement à $[0,1]$ et $[0,\Delta/2]$:

$$[0,\alpha\Delta]\cap\{\cup_{k\in\mathbb{Z}}[k\Delta+\tau,k\Delta+\tau+\alpha\Delta]\}=$$
$$\begin{cases}[0,\tau+(\alpha-1)\Delta]\cup[\tau,\alpha\Delta] \quad \text{si} \quad \alpha\geq\frac{1}{2} \text{ et } \tau\geq(1-\alpha)\Delta \\ [\tau,\alpha\Delta] \quad \text{si} \quad \{\alpha\geq\frac{1}{2} \text{ et } \tau<(1-\alpha)\Delta\} \text{ ou } \{\alpha<\frac{1}{2} \text{ et } \tau\leq\alpha\Delta\} \\ \{\emptyset\} \quad \text{sinon}\end{cases}$$

Utilisant le résultat précédent pour le calcul de γ_z si τ appartient à $[0, \Delta/2]$, nous obtenons :

$$\gamma_z(\tau) = \begin{cases} \frac{|A|^2}{\Delta}\left(\int_0^{\tau+(\alpha-1)\Delta} 1\,dt + \int_\tau^{\alpha\Delta} 1\,dt\right) \;\; \text{si } \alpha \geq \frac{1}{2} \text{ et } \tau \geq (1-\alpha)\Delta \\ \frac{|A|^2}{\Delta}\int_\tau^{\alpha\Delta} 1\,dt \;\; \text{si } \left\{\alpha \geq \frac{1}{2} \text{ et } \tau < (1-\alpha)\Delta\right\} \text{ ou } \left\{\alpha < \frac{1}{2} \text{ et } \tau \leq \alpha\Delta\right\} \\ 0 \;\; \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\gamma_z(\tau) = \begin{cases} \frac{|A|^2}{\Delta}(\tau + (\alpha-1)\Delta + \alpha\Delta - \tau) \;\; \text{si } \alpha \geq \frac{1}{2} \text{ et } \tau \geq (1-\alpha)\Delta \\ \frac{|A|^2}{\Delta}(\alpha\Delta - \tau) \;\; \text{si } \left\{\alpha \geq \frac{1}{2} \text{ et } \tau < (1-\alpha)\Delta\right\} \text{ ou } \left\{\alpha < \frac{1}{2} \text{ et } \tau \leq \alpha\Delta\right\} \\ 0 \;\; \text{sinon} \end{cases}$$

d'où :

$$\gamma_z(\tau) = \begin{cases} |A|^2(2\alpha - 1) \;\; \text{si } \alpha \geq \frac{1}{2} \text{ et } \tau \geq (1-\alpha)\Delta \\ \frac{|A|^2}{\Delta}(\alpha\Delta - \tau) \;\; \text{si } \left\{\alpha \geq \frac{1}{2} \text{ et } \tau < (1-\alpha)\Delta\right\} \text{ ou } \left\{\alpha < \frac{1}{2} \text{ et } \tau \leq \alpha\Delta\right\} \\ 0 \;\; \text{sinon} \end{cases}$$

En exploitant à présent la symétrie hermitienne de γ_z, nous obtenons :

$\forall\,\alpha \in [\,0, \frac{1}{2}\,[$	$\forall\,\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$
$\gamma_z(\tau) = 0 \;$ si $\tau \in [-\Delta/2, -\alpha\Delta[$	$\gamma_z(\tau) = \|A\|^2(2\alpha-1) \;$ si $\tau \in [-\Delta/2, (\alpha-1)\Delta]$
$\gamma_z(\tau) = \frac{\|A\|^2(\alpha\Delta+\tau)}{\Delta}$ si $\tau \in [-\alpha\Delta, 0[$	$\gamma_z(\tau) = \frac{\|A\|^2(\alpha\Delta+\tau)}{\Delta}$ si $\tau \in [(\alpha-1)\Delta, 0[$
$\gamma_z(\tau) = \frac{\|A\|^2(\alpha\Delta-\tau)}{\Delta}$ si $\tau \in [0, \alpha\Delta]$	$\gamma_z(\tau) = \frac{\|A\|^2(\alpha\Delta-\tau)}{\Delta}$ si $\tau \in [0, (1-\alpha)\Delta[$
$\gamma_z(\tau) = 0 \;$ si $\tau \in]\alpha\Delta, \Delta/2]$	$\gamma_z(\tau) = \|A\|^2(2\alpha-1) \;$ si $\tau \in [(1-\alpha)\Delta, \Delta/2]$

Sachant que la fonction γ_z est Δ-périodique, il est alors facile d'obtenir sa valeur en tout point de $\mathbb{R}$. Enfin, remarquons que quelque soit α appartenant à $[0, 1]$, le graphe de la fonction γ_z n'est autre qu'une alternance de palliers et de triangles. Toutefois, ces palliers sont non nuls uniquement pour $\alpha \geq 1/2$.