Contrôle continu n°2 en Mathématiques

ESIR, semestre 1, année 2011-2012

(aucun document n'est autorisé)

On rappelle le développement limité en 0 de fonctions usuelles :

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)\\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Etudiez les suites de fonctions définies ci-dessous en termes de convergences simple et uniforme.

1. Soit (f_n) la suite de fonctions définies pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \mathrm{e}^{n(x^2-3x+2)}$$

Identifiez l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ sur lequel la suite de fonctions (f_n) converge simplement mais non uniformément. Justifiez votre réponse.

Le polynôme $x^2 - 3x + 2$ admet pour racines 1 et 2, on en déduit que ce polynôme est négatif sur l'intervalle $[1, 2]$ et strictement positif sur l'ensemble $]-\infty, 1[\bigcup]2, +\infty[$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x = 1 \text{ ou } x = 2\\ 0 \text{ si } x \in]1, 2[\\ +\infty \text{ si } x \in]-\infty, 1[\bigcup]2, +\infty[\end{array}\right.$$

Par conséquent, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur l'intervalle $[1, 2]$ et ce vers la fonction f définie par :

$$\forall x \in [1, 2], \quad f(x) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x = 1 \text{ ou } x = 2\\ 0 \text{ si } x \in]1, 2[\end{array}\right.$$

D'autre part, les fonctions f_n sont continues sur $[1, 2]$ alors que f ne l'est pas. De ce fait, la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[1, 2]$.

2. Soit (g_n) la suite de fonctions définies pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \left(1 + \frac{2x^2}{n}\right)^n$$

Vers quelle fonction g la suite de fonctions (g_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?
On a pour tout x fixé de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{2x^2}{n}\right)\right) \\ g_n(x) &= \exp\left(n\left(\frac{2x^2}{n}-\frac{2x^4}{n^2}+\frac{x^4}{n^2}\varepsilon\left(\frac{x^2}{n}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

D'où, pour tout x fixé de $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \exp\left(2x^2\right) = g(x)$$

Démontrez l'inégalité $\ln(1+X) \leq X$ pour tout X appartenant à $\mathbb{R}^+$ (indication : démontrez que $\sup\{k(X)\} = 0$ sur $\mathbb{R}^+$ où $k(X) = \ln(1+X) - X$).
On a pour tout X de $\mathbb{R}^+$:

$$k'(X) = (\ln(1+X)-X)' = \frac{1}{1+X} - 1 = \frac{1}{1+X} - \frac{1+X}{1+X} = -\frac{X}{1+X} \leq 0$$

Par conséquent, la fonction k est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et atteint son maximum en 0. On a alors :

$$\forall X \in \mathbb{R}, \quad k(X) \leq k(0)$$

Par définition de k, on a $k(0) = 0$ et :

$$\forall X \in \mathbb{R}^+, \quad \ln(1+X) - X \leq 0$$

Et donc :

$$\forall X \in \mathbb{R}^+, \quad \ln(1+X) \leq X$$

Démontrez l'égalité $|g_n(x) - g(x)| = g(x) - g_n(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ (indication : utilisez l'inégalité démontrée précédemment).

On a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$g_n(x) - g(x) = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{2x^2}{n}\right)\right) - \exp\left(2x^2\right)$$

Or d'après l'inégalité démontrée précédemment, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln\left(1+\frac{2x^2}{n}\right) \leq \frac{2x^2}{n}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) - g(x) &\leq \exp\left(2x^2\right) - \exp\left(2x^2\right) \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) - g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

Et donc :

$$|g_n(x) - g(x)| = g(x) - g_n(x)$$

Pourquoi la valeur de $\sup\{|g_n(x) - g(x)|\}$ est-elle la même sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+$?
Elle est identique sur ces deux intervalles car la fonction $|g_n - g|$ est paire.

La suite de fonction (g_n) converge-t-elle uniformément vers g sur $\mathbb{R}$? Vous pourrez être amené à exploiter le fait que l'exponentielle d'un nombre négatif est toujours inférieure ou égale à un.

Soit $\ell = g - g_n$. D'après les résultats précédents, on a :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \{|g_n(x) - g(x)|\} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \{\ell(x)\}$$

Effectuons une étude de variations de la fonction ℓ sur $\mathbb{R}^+$ afin d'en déduire le sup sur ce même intervalle. Pour ce faire étudions le signe de la dérivée de ℓ. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \ell'(x) &= \left(\exp\left(2x^2\right) - \left(1 + \frac{2x^2}{n}\right)^n\right)' \\ &= 4x\left(\exp\left(2x^2\right) - \left(1 + \frac{2x^2}{n}\right)^{n-1}\right) \\ &= 4x\left(\exp\left(2x^2\right) - \exp\left((n-1)\ln\left(1 + \frac{2x^2}{n}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Or d'après l'inégalité $\ln(1+X) \leq X$ pour tout X appartenant à $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \ln\left(1 + \frac{2x^2}{n}\right) \leq \frac{2x^2}{n}$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell'(x) \geq 4x\left(\exp\left(2x^2\right) - \exp\left(\frac{2x^2(n-1)}{n}\right)\right)$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell'(x) \geq 4x\exp\left(2x^2\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{2x^2}{n}\right)\right)$$

Or, comme l'exponentielle de tout nombre négatif est inférieure ou égale à un, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \exp\left(-\frac{2x^2}{n}\right) \geq 0$$

Par conséquent on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell'(x) \geq 0$$

Ce qui implique que la fonction ℓ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a alors :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \{|g_n(x) - g(x)|\} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \{\ell(x)\} = +\infty$$

La suite de fonction (g_n) ne converge donc pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. Soit (h_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Sous quelles conditions, peut-on écrire :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b h_n(x)\,dx\right) = \int_a^b \lim_{n\to+\infty}(h_n(x))\,dx$$

Deux théorèmes ont été donnés en cours permettant tous deux de conduire au résultat énoncé ci-dessus. Le premier théorème, étudié dans le cours sur les suites de fonctions, requiert comme hypothèses que i) les fonctions h_n soient toutes intégrables sur $[a,b]$ au sens de Riemann et que ii) la suite de fonctions (h_n) converge uniformément sur $[a,b]$. Le second théorème, étudié quant-à-lui dans le cours de calcul intégral et portant le nom de théorème de Lebesgue (dit de convergence dominée), nécessite que les fonctions $|h_n|$ soient toutes majorées par une fonction φ intégrable sur $[a,b]$ au sens de Lebesgue.