Contrôle continu n°2 en Mathématiques

ESIR, semestre 1, année 2011-2012

(aucun document n'est autorisé)

On rappelle le développement limité en 0 de fonctions usuelles :

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)
\end{aligned}
$$

Etudiez les suites de fonctions définies ci-dessous en termes de convergences simple et uniforme.

1. Soit (f_n) la suite de fonctions définies pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \mathrm{e}^{n(x^2-3x+2)}$$

Identifiez l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ sur lequel la suite de fonctions (f_n) converge simplement mais non uniformément. Justifiez votre réponse.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Soit (g_n) la suite de fonctions définies pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \left(1 + \frac{2x^2}{n}\right)^n$$

Vers quelle fonction g la suite de fonctions (g_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Démontrez l'inégalité $\ln(1+X) \leq X$ pour tout X appartenant à $\mathbb{R}^+$ (indication : démontrez que $\sup\{k(X)\} = 0$ sur $\mathbb{R}^+$ où $k(X) = \ln(1+X) - X$).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Démontrez l'égalité $|g_n(x) - g(x)| = g(x) - g_n(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ (indication : utilisez l'inégalité démontrée précédemment).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Pourquoi la valeur de $\sup\{|g_n(x) - g(x)|\}$ est-elle la même sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+$?

La suite de fonction (g_n) converge-t-elle uniformément vers g sur $\mathbb{R}$? Vous pourrez être amené à exploiter le fait que l'exponentielle d'un nombre négatif est toujours inférieure ou égale à un.

3. Soit (h_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Sous quelles conditions, peut-on écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b h_n(x)\, dx \right) = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} (h_n(x))\, dx$$