

MASTER 2 : THERMOMÉCANIQUE UE 1

L RAKOTOMANANA

Fonctions d'élongation et de changement d'aire : Enoncé

On considère la transformation d'un milieu continu $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ en très grandes déformations. Nous définissons l'élongation scalaire d'une fibre matérielle ou le changement d'aire d'une facette matérielle par :

$$\lambda := \lim_{d\mathbf{X} \rightarrow 0} \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|}, \quad \eta := \lim_{d\mathbf{S} \rightarrow 0} \frac{\|d\mathbf{s}\|}{\|d\mathbf{S}\|}$$

Dans la configuration initiale, on définit les vecteurs unitaires \mathbf{M} et \mathbf{N} par les relations $d\mathbf{X} = \mathbf{M} \|d\mathbf{X}\|$ et $d\mathbf{S} = \mathbf{N} \|d\mathbf{S}\|$. On définit également les vecteurs unitaires transformés \mathbf{m} et \mathbf{n} par $d\mathbf{x} = \mathbf{m} \|d\mathbf{x}\|$ et $d\mathbf{s} = \mathbf{n} \|d\mathbf{s}\|$.

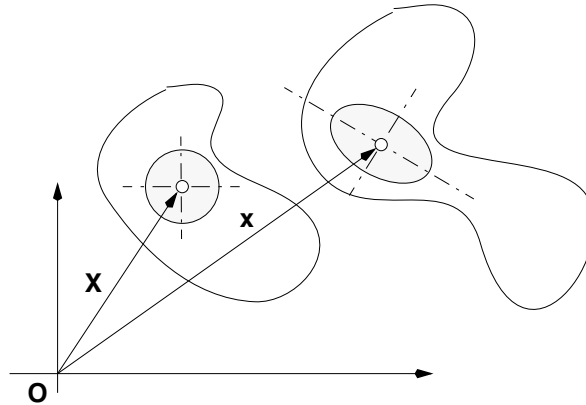


FIG. 1 – Représentation de l'élongation locale $\lambda(\mathbf{M}, \mathbf{C})$ dans un milieu continu en transformations finies.

1. Exprimer les fonctions d'élongation et de changement d'aire :

$$\lambda = \lambda(\mathbf{M}, \mathbf{C}), \quad \eta = \eta(\mathbf{N}, \mathbf{C})$$

Remarques 0.1 La dérivée $\overline{\ln(\lambda)} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$ est appelée quelquefois taux de déformation vraie lors d'une expérimentation d'extension uniaxiale.

2. Considérer les deux transformations suivantes $\gamma \in \mathbb{R}_+$, respectivement extension uniaxiale et glissement simple, :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \gamma x_1, & \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\gamma}{2} x_2, & \frac{dx_3}{dt} &= -\frac{\gamma}{2} x_3 \\ \frac{dx_1}{dt} &= \gamma x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= 0, & \frac{dx_3}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Considérons des fibres matérielles $\mathbf{M} = M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2 + M_3 \mathbf{e}_3$. Calculer $\overline{\ln(\lambda)}$ dans ces deux cas. Comment se comportent respectivement ces quantités lorsque $t \rightarrow \infty$?

Remarques 0.2 *Le but de cet exercice est de comparer l'efficacité de deux types de transformations finies (écoulement de glissement et écoulement d'extension) dans un processus de mélange de milieux continus immiscibles.*

Fluides parfaits compressible : Enoncé

On considère un fluide parfait compressible dont l'énergie libre de Helmholtz prend la forme $\psi = \psi(\mathbb{I}_3)$ avec $\mathbb{I}_3 = \text{Det} \mathbf{C}$. On imagine une expérimentation de compression du fluide dans une moule indéformable cylindrique. L'application d'une pression p sur la partie supérieure du cylindre engendre une diminution de la hauteur h . Donner la relation $p(h)$ en utilisant l'expression de l'énergie libre ψ .

Cylindre épais sous pression interne : Enoncé

On considère un cylindre creux épais de rayon interne a soumis à une pression interne p_0 . Le matériau est du type néo-Hookéen incompressible. Nous admettons que sous cette pression sur la paroi interne, le cylindre s'allonge de manière homogène et subit la transformation finie :

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}), \quad \begin{cases} r = r(R) \\ \theta = \Theta \\ z = \lambda Z \end{cases}$$

pour lesquelles nous avons utilisé un système de coordonnées cylindriques tant pour la configuration initiale avec la base locale orthonormée en \mathbf{X} , $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_Z)$ que pour la configuration actuelle en \mathbf{x} , $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. La transformation est supposée isotherme. Résoudre

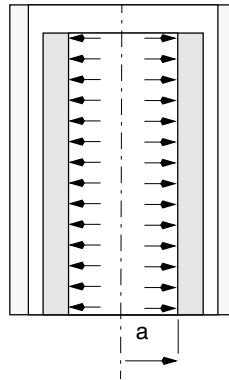


FIG. 2 – Cylindre circulaire épais soumise à une pression uniforme interne et pouvant changer de longueur de manière homogène selon son axe.

le champ de déplacement. Ecrire l'équation d'équilibre du cylindre.

Glissement simple : Enoncé

On considère un milieu continu \mathcal{B} dont densité dans la configuration initiale ρ_0 est supposée uniforme. Dans tout le problème nous utiliserons un système d'axes orthonormés direct $(O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$ par rapport auquel les deux configurations initiale et déformée sont définies. La transformation homogène à étudier $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \varphi(\mathcal{B})$ est le glissement simple sinusoidal :

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) = [X_1 + X_2 \gamma \sin(\omega t)] \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3 \quad \gamma > 0$$

1. Calculer les tenseurs de déformation de CAUCHY-GREEN \mathbf{C} et de GREEN-LAGRANGE \mathbf{E} .
2. On suppose que le champ de température reste uniforme dans \mathcal{B} (et dans $\varphi(\mathcal{B})$) et constante $\forall t \geq 0$. Il n'y a pas d'apport de chaleur ni sur la frontière $\partial\mathcal{B}$ ni dans le volume \mathcal{B} . La loi du comportement du milieu continu est définie par son énergie libre de HELMHOLTZ :

$$\psi(\mathbf{C}) = \frac{\lambda}{2} \text{Tr}^2\mathbf{E} + \mu \text{Tr}\mathbf{E}^2$$

dans laquelle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $\mu \in \mathbb{R}_+$ sont des constantes du matériau. On notera ρ_0 la densité du matériau dans sa configuration initiale.

- (a) Calculer le second tenseur de contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF \mathbf{S} en fonction de \mathbf{E} pour une transformation quelconque du milieu continu. Appliquer pour le cas du glissement simple sinusoidal.
- (b) Exprimer la puissance de déformation par unité de volume initial (dV) lors du glissement simple sinusoidal. Calculer le travail de déformation interne au cours d'un cycle $t_i = 0 \leq t \leq t_f = \frac{2\pi}{\omega}$. Considérer le cas où t_f est quelconque.
3. A partir de la configuration déformée $\varphi(\mathcal{B})$ due au glissement simple sinusoidal, on superpose un mouvement rigide défini par une rotation $\mathbf{Q}(t)$ autour de l'axe $O\mathbf{e}_3$ et d'angle $\alpha(t)$ suivie d'une translation $\mathbf{x}_0(t)$. La composition du glissement simple sinusoidal et du mouvement rigide est notée $\mathbf{x}^* = \varphi^*(\mathbf{X}, t)$.
 - (a) Donner l'expression du second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF \mathbf{S}^* en fonction du tenseur de GREEN-LAGRANGE \mathbf{E}^* pour la transformation composée φ^* .
 - (b) Calculer les tenseurs de contrainte de CAUCHY dans les deux cas suivants
 - i. σ lors de la transformation glissement simple sinusoidal $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$,
 - ii. σ^* lors de la transformation composée $\mathbf{x}^* = \varphi^*(\mathbf{X}, t)$. Commenter.

Atténuation thermoélastique des ondes : Enoncé

Dans cette section, nous essayons de montrer avec un modèle linéaire simple l'influence de la thermique sur la dynamique et la propagation des ondes élastiques dans un milieu continu. Pour cela, considérons un milieu homogène isotrope dont les lois de comportement sont définies par le potentiel énergie libre et le potentiel de dissipation thermique que nous avons développés au premier chapitre (matériaux simples au sens de Noll).

On considère un matériau thermoélastique tel que l'énergie libre de Helmholtz et le potentiel de dissipation s'écrivent en transformations finies :

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\lambda}{2} \text{Tr}^2\mathbf{E} + \mu \text{Tr}\mathbf{E}^2 - (3\lambda + 2\mu) \alpha (\theta - \theta_0) \text{Tr}\mathbf{E} - \frac{c}{2\theta_0} (\theta - \theta_0)^2 \\ \chi &= \frac{\kappa}{2} \nabla\theta \cdot \nabla\theta \end{aligned}$$

Les constantes λ et μ sont les coefficients de Lamé, α le coefficient d'expansion thermique, c la chaleur spécifique et θ_0 une température moyenne de référence. La contrainte, l'entropie et le flux de chaleur dans ce matériau couplé sont donnés par :

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \lambda \operatorname{Tr}\mathbf{E}\mathbb{I} + 2\mu \mathbf{E} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(\theta - \theta_0)\mathbb{I} \\ s &= (3\lambda + 2\mu)\alpha\operatorname{Tr}\mathbf{E} + \frac{c}{\theta_0}(\theta - \theta_0) \\ \mathbf{Q} &= -\kappa\theta \nabla\theta\end{aligned}$$

De même, en considérant de nouveau la conservation de l'énergie, nous obtenons directement l'équation de propagation de la chaleur :

$$\rho_0\theta(3\lambda + 2\mu)\alpha \operatorname{Tr}\dot{\mathbf{E}} + \rho_0\frac{\theta}{\theta_0}c \dot{\theta} = \kappa \Delta\theta + \kappa\|\nabla\theta\|^2 + \rho_0r$$

1. Ecrire les lois de conservation et les lois de comportement dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations (linéarisées).
2. Considérer une barre unidimensionnelle avec $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = u(X, t)\mathbf{e}_1$ et $\theta(\mathbf{X}, t) = \theta(X, t)$ et écrire les équations dans ce cas. Considérer les solutions ondes du type :

$$\begin{aligned}u(X, t) &= u_0 \exp[j(\omega t + kx)] \\ \theta(X, t) &= \theta_0 \exp[j(\omega t + kx)]\end{aligned}$$

3. Ecrire la condition nécessaire et suffisante pour que de telles solutions ondes existent. Montrer que les ondes mécaniques sont atténuées par l'existence du couplage en thermoélasticité.

SOLUTIONS DES EXEMPLES

ELONGATION ET CHANGEMENT D'AIRE

Pour analyser ces deux aspects de la déformation d'un milieu continu en très grandes transformations, nous proposons un exercice avec correction.

Fonctions d'élongation et de changement d'aire : Énoncé On considère la transformation d'un milieu continu $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ en très grandes déformations. Nous définissons l'élongation scalaire d'une fibre matérielle ou le changement d'aire d'une facette matérielle par :

$$\lambda := \lim_{d\mathbf{X} \rightarrow 0} \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|}, \quad \eta := \lim_{d\mathbf{S} \rightarrow 0} \frac{\|d\mathbf{s}\|}{\|d\mathbf{S}\|}$$

Dans la configuration initiale, on définit les vecteurs unitaires \mathbf{M} et \mathbf{N} par les relations $d\mathbf{X} = \mathbf{M} \|d\mathbf{X}\|$ et $d\mathbf{S} = \mathbf{N} \|d\mathbf{S}\|$. On définit également les vecteurs unitaires transformés \mathbf{m} et \mathbf{n} par $d\mathbf{x} = \mathbf{m} \|d\mathbf{x}\|$ et $d\mathbf{s} = \mathbf{n} \|d\mathbf{s}\|$.

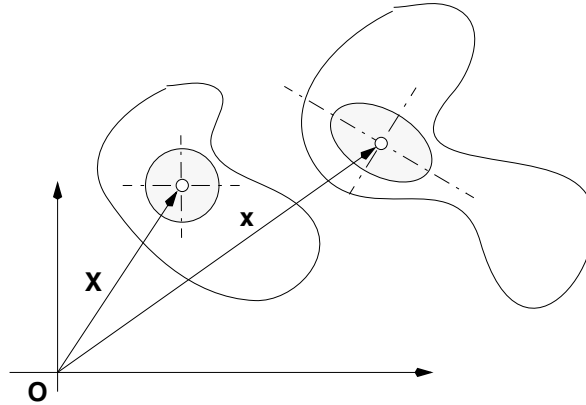


FIG. 3 – Représentation de l'élongation locale $\lambda(\mathbf{M}, \mathbf{C})$ dans un milieu continu en transformations finies.

1. Exprimer les fonctions d'élongation et de changement d'aire :

$$\lambda = \lambda(\mathbf{M}, \mathbf{C}), \quad \eta = \eta(\mathbf{N}, \mathbf{C})$$

Remarques 0.3 La dérivée $\overline{\ln(\lambda)} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$ est appelée quelquefois *taux de déformation vraie* lors d'une expérimentation d'extension uniaxiale.

2. Considérer les deux transformations suivantes $\gamma \in \mathbb{R}_+$, respectivement extension uniaxiale et glissement simple, :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \gamma x_1, & \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\gamma}{2} x_2, & \frac{dx_3}{dt} &= -\frac{\gamma}{2} x_3 \\ \frac{dx_1}{dt} &= \gamma x_2, & \frac{dx_2}{dt} &= 0, & \frac{dx_3}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Considérons des fibres matérielles $\mathbf{M} = M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2 + M_3 \mathbf{e}_3$. Calculer $\overline{\ln(\lambda)}$ dans ces deux cas. Comment se comportent respectivement ces quantités lorsque $t \rightarrow \infty$?

Remarques 0.4 *Le but de cet exercice est de comparer l'efficacité de deux types de transformations finies (écoulement de glissement et écoulement d'extension) dans un processus de mélange de milieux continus immiscibles.*

Fonctions d'élongation et de changement d'aire : Solution Nous définissons l'élongation scalaire d'une fibre matérielle ou le changement d'aire d'une facette matérielle par :

$$\lambda := \lim_{d\mathbf{X} \rightarrow 0} \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|}, \quad \eta := \lim_{d\mathbf{S} \rightarrow 0} \frac{\|ds\|}{\|d\mathbf{S}\|}$$

Par la suite, ces fonctions sont appelées *fonctions d'élongations*. Dans la configuration initiale, on définit les vecteurs unitaires \mathbf{M} et \mathbf{N} par les relations $d\mathbf{X} = \mathbf{M} \|d\mathbf{X}\|$ et $d\mathbf{S} = \mathbf{N} \|d\mathbf{S}\|$. On définit également les vecteurs unitaires transformés \mathbf{m} et \mathbf{n} par $d\mathbf{x} = \mathbf{m} \|d\mathbf{x}\|$ et $ds = \mathbf{n} \|ds\|$.

1. On peut exprimer les fonctions d'élongations en écrivant :

$$\lambda^2 = \lim_{d\mathbf{X} \rightarrow 0} \frac{\|d\mathbf{x}\|^2}{\|d\mathbf{X}\|^2} = \lim_{d\mathbf{X} \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} (d\mathbf{X})}{d\mathbf{X} \cdot \mathbb{I} (d\mathbf{X})} = \lim_{d\mathbf{X} \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|} \cdot \mathbf{C} \left(\frac{d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|} \right)$$

On en déduit :

$$\lambda = \sqrt{\mathbf{M} \cdot \mathbf{C} (\mathbf{M})}$$

Pour le changement d'aire d'une facette, on peut écrire de manière analogue en utilisant le théorème de Nanson :

$$\eta^2 = \lim_{d\mathbf{S} \rightarrow 0} \frac{\|ds\|^2}{\|d\mathbf{S}\|^2} = \lim_{d\mathbf{S} \rightarrow 0} \text{Det} \mathbf{C} \frac{d\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}^{-1} (d\mathbf{S})}{d\mathbf{S} \cdot \mathbb{I} (d\mathbf{S})} = \lim_{d\mathbf{S} \rightarrow 0} \text{Det} \mathbf{C} \frac{d\mathbf{S}}{\|d\mathbf{S}\|} \cdot \mathbf{C}^{-1} \left(\frac{d\mathbf{S}}{\|d\mathbf{S}\|} \right)$$

Ce qui nous donne :

$$\eta = \sqrt{\text{Det} \mathbf{C} \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{N})}$$

2. De ces relations cinématiques générales, nous pouvons alors écrire :

$$\overline{\ln(\lambda)} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dot{\sqrt{\mathbf{M} \cdot \mathbf{C} (\mathbf{M})}}}{\sqrt{\mathbf{M} \cdot \mathbf{C} (\mathbf{M})}} = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{C} (\mathbf{M}) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} (\mathbf{m})$$

De manière analogue on a :

$$\overline{\ln(\text{Det} \mathbf{F})} = \mathbf{grad} \mathbf{v} : \mathbb{I}, \quad \overline{\ln(\eta)} = \mathbf{grad} \mathbf{v} : (\mathbb{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$$

3. Application pour ces deux transformations on a respectivement :

(a) La première transformation d'extension devient :

$$x_1 = X_1 \exp(\gamma t), \quad x_2 = X_2 \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right), \quad x_3 = X_3 \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right)$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= M_1^2 \exp(2\gamma t) + M_2^2 \exp(-\gamma t) + M_3^2 \exp(-\gamma t) \\ \overline{\ln(\lambda)} &= \frac{\gamma}{2} \frac{2M_1^2 \exp(3\gamma t) - M_2^2 - M_3^2}{M_1^2 \exp(3\gamma t) + M_2^2 + M_3^2} \end{aligned}$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, on a :

$$\overline{\ln(\lambda)} \simeq \gamma$$

(b) Pour la seconde transformation de glissement simple, tout calcul fait, on a d'abord la transformation :

$$x_1 = X_1 + X_2 \gamma t, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3$$

ensuite la dérivée de l'élongation :

$$\overline{\dot{\ln(\lambda)}} = \frac{\gamma M_2 (M_1 + M_2 \gamma t)}{1 + M_2 \gamma t (2M_1 + M_2 \gamma t)}$$

On remarque que lorsque t est très grand, la dérivée devient :

$$\overline{\dot{\ln(\lambda)}} \simeq \frac{1}{t}$$

Remarques 0.5 On peut remarquer la relation $\overline{\dot{\ln(\lambda)}} = \mathbf{D} : \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \leq \|\mathbf{D}\| \cdot \|\mathbf{m}\|^2 = \|\mathbf{D}\|$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ce qui montre que la fonction d'efficiency de mélange :

$$e_\lambda := \frac{\overline{\dot{\ln(\lambda)}}}{\|\mathbf{D}\|} \leq 1$$

quelle que soit la transformation du milieu continu. Pour les deux exemples, on a respectivement $\lim_{t \rightarrow \infty} e_\lambda = \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0.816$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} e_\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.707$.

RAPPEL SUR LES DÉRIVÉES DE FONCTIONS TENSORIELLES

Nous considérons maintenant des fonctions, c-à-d des tenseurs qui dépendent d'autres arguments scalaire, vectoriels ou tensoriels du second ordre. Nous traiterons les fonctions du type :

$$\varphi(\alpha, \mathbf{v}, \mathbf{S}), \quad \mathbf{u}(\alpha, \mathbf{v}, \mathbf{S}), \quad \mathbf{T}(\alpha, \mathbf{v}, \mathbf{S}) \quad (1)$$

Ce rappel se limite à la notion de dérivation de fonctions scalaires, vectorielles et tensorielles (2ème ordre) avec des arguments scalaires, vectorielles et tensorielles. Nous utilisons les normes suivantes :

1. scalaire $|\alpha|$
2. vecteur $\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$
3. tenseur $\|\mathbf{S}\| := \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{S}^T \mathbf{S})}$.

Dérivée directionnelle. Nous donnons les notions pour dériver une fonction à argument scalaire, vectoriel ou tensoriel.

Définition 0.1 *La dérivée directionnelle de la fonction φ à valeur scalaire, vectorielle, tensorielle et à argument scalaire, vectoriel ou tensoriel, en α , \mathbf{v} et \mathbf{U} selon la direction β , \mathbf{u} et \mathbf{U} est définie par :*

$$D\varphi(\alpha)[\beta] := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\varphi(\alpha + \epsilon\beta) - \varphi(\alpha)] \quad (2)$$

$$D\varphi(\mathbf{v})[\mathbf{u}] := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\varphi(\mathbf{v} + \epsilon\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v})] \quad (3)$$

$$D\varphi(\mathbf{V})[\mathbf{U}] := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\varphi(\mathbf{V} + \epsilon\mathbf{U}) - \varphi(\mathbf{V})] \quad (4)$$

Cette définition est indépendante de la norme choisie. Pour $\varphi(\mathbf{v})$ différentiable, on a par exemple :

$$\varphi(\mathbf{v} + \epsilon\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v}) = D\varphi(\mathbf{v})[\mathbf{u}] + \mathcal{O}(\|\mathbf{u}\|) \quad (5)$$

Ce qui exprime que cette différence est égale à un terme linéaire en plus un terme qui tend vers 0 plus vite que $\|\mathbf{u}\|$.

Exemples. En appliquant directement la définition, on a les exemples suivants :

1. Dérivée d'un produit scalaire :

$$\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad \implies \quad D\varphi(\mathbf{v})[\mathbf{u}] = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

2. Dérivée d'une fonction tensorielle à argument tensoriel :

$$\varphi(\mathbf{S}) = \mathbf{S}^2 \quad \implies \quad D\varphi(\mathbf{S})[\mathbf{U}] = \mathbf{S}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{S}$$

3. Trace (fonction scalaire à argument tensoriel) :

$$\varphi(\mathbf{S}) = \text{Tr}\mathbf{S} \quad \implies \quad D\varphi(\mathbf{S})[\mathbf{U}] = \text{Tr}\mathbf{U}$$

Remarques 0.6 *De manière générale, toutes les fonctions linéaires ont cette propriété.*

4. Déterminant : $\varphi(\mathbf{S}) := \det \mathbf{S}$. On rappelle la relation suivante obtenue sans difficulté :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{I}) = -\lambda^3 + \mathbb{I}_1 \lambda^2 - \mathbb{I}_2 \lambda - \mathbb{I}_3$$

avec :

$$\mathbb{I}_1 = \text{Tr} \mathbf{A}, \quad \mathbb{I}_2 = \frac{1}{2} (\text{Tr}^2 \mathbf{A} - \text{Tr} \mathbf{A}^2), \quad \mathbb{I}_3 = \det \mathbf{A}$$

En introduisant $\lambda = -1$, on a :

$$\det(\mathbb{I} + \mathbf{A}) = 1 + \mathbb{I}_1(\mathbf{A}) + \mathbb{I}_2(\mathbf{A}) + \mathbb{I}_3(\mathbf{A})$$

On peut alors écrire la relation suivante :

$$\det(\mathbf{S} + \epsilon \mathbf{U}) = \det \mathbf{S} [\det(\mathbb{I} + \epsilon \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U})]$$

Ce qui nous donne en posant $\mathbf{A} := \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U}$:

$$\det(\mathbf{S} + \epsilon \mathbf{U}) - \det(\mathbf{S}) = \det \mathbf{S} [1 + \epsilon \mathbb{I}_1(\mathbf{A}) + \epsilon^2 \mathbb{I}_2(\mathbf{A}) + \epsilon^3 \mathbb{I}_3(\mathbf{A}) - 1]$$

Il en résulte la dérivée directionnelle d'un déterminant :

$$\varphi(\mathbf{S}) = \det \mathbf{S} \quad \Longrightarrow \quad D\varphi(\mathbf{S})[\mathbf{U}] = \det \mathbf{S} \text{Tr}(\mathbf{S}^{-1} \mathbf{U})$$

Dérivée d'un produit Nous considérons les fonctions produit de deux fonctions $\varphi(\mathbf{v})$ et $\psi(\mathbf{v})$, notée chacune d'elles a des arguments scalaire, vectoriel ou tensoriel. Le produit est bilinéaire. Voici quelques exemples de produits de fonctions :

1. scalaire x vectorielle $\alpha \mathbf{v}$
2. vectorielle x vectorielle $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
3. produit tensoriel $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$
4. tensorielle x vectorielle $\mathbf{S}(\mathbf{v})$

Théorème 0.1 Soient les fonctions $\varphi(\mathbf{v})$ et $\psi(\mathbf{v})$ différentiables en \mathbf{v} , alors leur produit (bilinéaire) $\pi(\varphi, \psi)$ est différentiable en \mathbf{v} et la dérivée de \mathbf{v} en selon la direction \mathbf{u} est donnée par :

$$D\pi(\mathbf{v})[\mathbf{u}] = \pi\{D\varphi(\mathbf{v})[\mathbf{u}], \psi(\mathbf{v})\} + \pi\{\varphi(\mathbf{v}), D\psi(\mathbf{v})[\mathbf{u}]\} \quad (6)$$

Preuve : Pour des raisons pédagogiques, on donne plutôt un exemple pour deux tenseurs $\pi = \mathbf{F}\mathbf{G}$. La généralisation est immédiate.

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{S}) &= \mathbf{F}(\mathbf{S}) \mathbf{G}(\mathbf{S}) \\ D\pi(\mathbf{S})[\mathbf{U}] &= D\mathbf{F}(\mathbf{S})[\mathbf{U}] \mathbf{G}(\mathbf{S}) + \mathbf{F}(\mathbf{S}) D\mathbf{G}(\mathbf{S})[\mathbf{U}] \end{aligned}$$

En guise d'application, on peut calculer la dérivée de l'inverse d'un tenseur. Un calcul direct est trop difficile, nous contournons cette difficulté en considérant la dérivée d'un produit, qui est une fonction constante dont la dérivée est nulle :

$$\pi(\mathbf{S}) = \mathbf{F}(\mathbf{S}) \mathbf{G}(\mathbf{S}) = \mathbb{I}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{S}) = \mathbf{S}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{S}) = \mathbf{S}^{-1}$$

On en déduit facilement :

$$D\mathbf{G}(\mathbf{S})[\mathbf{U}] = -\mathbf{S}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{S}^{-1} \quad (7)$$

Exemple d'un tenseur symétrique. Cette opération est appliquée usuellement dans le calcul du tenseur tangent de matériaux élastiques avec une loi constitutive du type $\mathbf{S}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^{-1}$ dans laquelle les deux tenseurs \mathbf{S} et \mathbf{C} sont symétriques. Le calcul du tenseur tangent doit passer par l'utilisation de la "direction symétrisée" $\frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{U}^T)$:

$$D\mathbf{S}(\mathbf{C})[\mathbf{U}] = -\frac{1}{2} \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{U} + \mathbf{U}^T) \mathbf{S}^{-1}$$

Ce qui nous permet par exemple de trouver la dérivée directionnelle de l'inverse d'un tenseur symétrique :

$$\delta C_{KM}^{-1} = -\frac{1}{2} (C_{KL}^{-1} C_{MN}^{-1} + C_{KN}^{-1} C_{ML}^{-1}) \delta C_{LN}$$

La dérivée de la fonction tensorielle inverse est alors donnée par :

$$\frac{dC_{KM}^{-1}}{dC_{LN}} = -\frac{1}{2} (C_{KL}^{-1} C_{MN}^{-1} + C_{KN}^{-1} C_{ML}^{-1})$$

MATÉRIAUX THERMO-HYPERÉLASTIQUES ISOTROPES

Formulation générale. De l'inégalité de l'entropie, nous avons montré que la contrainte de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} peut être calculée en dérivant le potentiel énergie libre de Helmholtz selon la formule (approche en \mathbf{C}) :

$$\mathbf{S} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}, \theta) \quad (8)$$

Pour les matériaux isotropes, on peut utiliser le théorème de représentation puis appliquer la composition de la dérivation pour obtenir :

$$\mathbf{S} = 2\rho_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{I}_1} \frac{\partial \mathbb{I}_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{I}_2} \frac{\partial \mathbb{I}_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{I}_3} \frac{\partial \mathbb{I}_3}{\partial \mathbf{C}} \right)$$

dans laquelle on a :

$$\frac{\partial \mathbb{I}_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{I}, \quad \frac{\partial \mathbb{I}_2}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{I}_1 \mathbb{I} - \mathbf{C} \quad \frac{\partial \mathbb{I}_3}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{I}_3 \mathbf{C}^{-1}$$

On en déduit la forme générale de la contrainte matérielle pour les matériaux thermoélastiques isotropes :

$$\boxed{\mathbf{S} = 2\rho_0 \left[\mathbb{I}_3 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{I}_3} \mathbf{C}^{-1} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{I}_1} + \mathbb{I}_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{I}_2} \right) \mathbb{I} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{I}_2} \mathbf{C} \right]} \quad (9)$$

Remarques 0.7 *On peut faire les remarques suivantes.*

1. *On observe la présence de trois puissances consécutives de \mathbf{C} dans cette formule générale. On peut envisager de mettre d'autres puissances mais l'application du théorème de Cayley-Hamilton sur les matrices permet de les éliminer et ne garder que trois puissances consécutives.*
2. *On peut facilement vérifier que le terme en \mathbf{C}^{-1} représente la pression hydrostatique dans le matériau. D'ailleurs la possibilité d'inverser le tenseur \mathbf{C} avec cette interprétation physique évidente constitue un avantage certain pour l'utilisation de \mathbf{C} .*

Fluide parfait. Nous supposons une loi de comportement isotherme pour simplifier. Pour un milieu dont la pression est donnée en fonction de la densité $p = p(\rho)$, on peut directement utiliser la conservation de la masse $\rho_0 = \rho \det \mathbf{F}$ pour avoir plutôt une loi de comportement du type $p = p(\mathbb{I}_3)$ puisque $\det \mathbf{F} = \sqrt{\mathbb{I}_3}$. L'énergie libre d'un tel matériau est donc de la forme :

$$\psi = \psi(\mathbb{I}_3) \quad (10)$$

Nous en déduisons la seconde contrainte de Piola-Kirchhoff et la contrainte de Cauchy :

$$\mathbf{S} = 2\rho_0 \mathbb{I}_3 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{I}_3} \mathbf{C}^{-1}, \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\rho_0 \sqrt{\mathbb{I}_3} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{I}_3} \mathbf{i} \quad (11)$$

Remarques 0.8 L'observation de la forme de $\boldsymbol{\sigma}$ nous permet de dire que l'état de contrainte est un état de pression hydrostatique. Il s'en suit la pression :

$$p(\mathbb{I}_3) = 2\rho_0 \sqrt{\mathbb{I}_3} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{I}_3}$$

La mesure expérimentale d'une part de la pression p et de l'autre le changement de volume $\det \mathbf{F}$ permet de trouver la fonction énergie libre d'un tel matériau.

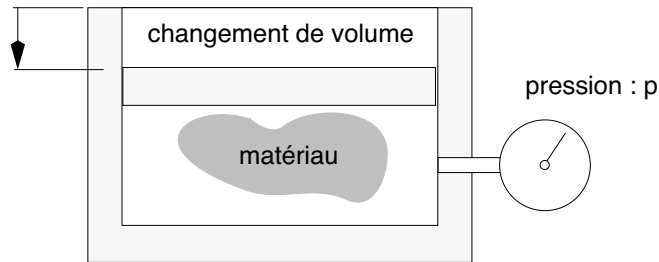


FIG. 4 – Schéma du dispositif expérimental pour mesurer le changement de volume d'un matériau plongé dans un liquide incompressible. La pression est également mesurée de manière indépendante, ce qui permet de trouver expérimentalement la relation pression changement de volume.

EXEMPLE DE CYLINDRE ÉPAIS SOUS PRESSION INTERNE

Cylindre épais sous pression interne : Énoncé On considère un cylindre creux épais de rayon interne a soumis à une pression interne p_0 . Le matériau est du type néo-Hokéen incompressible. Nous admettons que sous cette pression sur la paroi interne, le cylindre s'allonge de manière homogène et subit la transformation finie :

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}), \quad \begin{cases} r = r(R) \\ \theta = \Theta \\ z = \lambda Z \end{cases}$$

pour lesquelles nous avons utilisé un système de coordonnées cylindriques tant pour la configuration initiale avec la base locale orthonormée en \mathbf{X} , $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_Z)$ que pour la configuration actuelle en \mathbf{x} , $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. La transformation est supposée isotherme. Résoudre

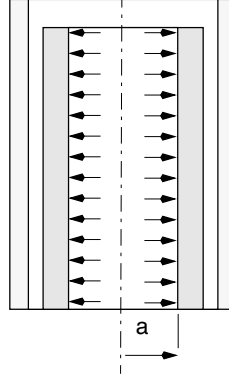


FIG. 5 – Cylindre circulaire épais soumise à une pression uniforme interne et pouvant changer de longueur de manière homogène selon son axe.

le champ de déplacement. Ecrire l'équation d'équilibre du cylindre.

Cylindre épais sous pression interne : Solution

Expression générale du gradient \mathbf{F} . En partant de la définition $d\mathbf{x} := \mathbf{F}(d\mathbf{X})$ et sachant que

$$d\mathbf{X} = dR \mathbf{e}_R + R d\Theta \mathbf{e}_\Theta + dZ \mathbf{e}_Z, \quad d\mathbf{x} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z$$

en système de coordonnées cylindriques, nous obtenons facilement le gradient de la transformation sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \Theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ r \frac{\partial \theta}{\partial R} & \frac{r}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & r \frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dR \\ R d\Theta \\ dZ \end{pmatrix} \quad (12)$$

Pour la transformation particulière, le gradient prend la forme :

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Sachant que notre matériau est incompressible, le changement de volume $dv = \text{Det}\mathbf{F} dV = dV$ nous impose $\text{Det}\mathbf{F} = 1$. D'où la relation de liaison géométrique :

$$\frac{\partial r}{\partial R} \frac{r}{R} \lambda \equiv 1 \quad \implies \quad r^2 = \frac{1}{\lambda} R^2 + C$$

dans laquelle C est une constante numérique (ou fonction du temps en dynamique). En posant que le déplacement de la paroi interne du cylindre de rayon $R = a$ est u_a , on a :

$$r^2 = \frac{1}{\lambda} (R^2 - a^2) + (a + u_a)^2$$

Loi de comportement du cylindre. Puisque le matériau est incompressible, on peut rappeler l'expression de l'inégalité de Clausius-Duhem-Truesdell sous la forme suivante, en transformations isothermes, :

$$\left(\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \right) : \frac{\dot{\mathbf{C}}}{2} \geq 0$$

Cette relation doit être vérifiée quelque soit la transformation donc quelque soit $\dot{\mathbf{C}}$. A cause de la liaison, on ne parcourt pas toutes les transformations possibles et il faut ajouter à la contrainte un multiplicateur de Lagrange :

$$\left(\mathbf{S} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} + \mathbb{I}_3 p \mathbf{C}^{-1} \right) : \frac{\dot{\mathbf{C}}}{2} \geq 0 \quad (13)$$

puisque la pression hydrostatique ne travaille pas et on peut ajouter une pression quelconque sans changer la puissance de déformation. On en déduit la loi de comportement d'un matériau incompressible élastique ($\mathbb{I}_3 = 1$) :

$$\mathbf{S} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} - p \mathbf{C}^{-1} \quad (14)$$

Pour cet exemple, nous avons choisi un modèle de matériau néo-Hookéen dont l'énergie libre isotherme s'écrit :

$$\psi() = \frac{\mu}{2} (\text{Tr}\mathbf{C} - 3)$$

En absorbant la densité ρ_0 dans le coefficient μ , la seconde contrainte de Piola-Kirchhoff et la contrainte nominale sont respectivement données par :

$$\mathbf{S} = \mu \mathbb{I} - p \mathbf{C}^{-1}, \quad \mathbf{P} = \mu \mathbf{F} - p \mathbf{F}^{-T}$$

Pour la transformation particulière étudiée, les composantes de la contrainte nominale sont :

$$\mathbf{P} = \left(\mu \frac{\partial r}{\partial R} - p \frac{1}{\partial r} \right) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \left(\mu \frac{r}{R} - p \frac{1}{R} \right) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\Theta + \left(\mu \lambda - p \frac{1}{\lambda} \right) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z$$

Nous remarquons que dans cet exemple particulier axisymétrique et sans torsion les bases locales des deux systèmes de coordonnées cylindriques sont confondues.

Equations d'équilibre. La seule inconnue du problème est la distribution de la pression hydrostatique $p(R, t)$ dans le cylindre. En l'absence de forces volumiques extérieures, l'équation du mouvement en transformations finies s'écrit :

$$\text{Div } \mathbf{P} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

avec $\mathbf{u} = (r - R) \mathbf{e}_R + (\lambda - 1) Z \mathbf{e}_Z$. Dans un système de coordonnées cylindriques, nous allons utiliser les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R \cdot \text{Div } \mathbf{P} &= \text{Div} (\mathbf{P}^T \mathbf{e}_R) - \mathbf{P} : \nabla \mathbf{e}_R \\ \mathbf{e}_\Theta \cdot \text{Div } \mathbf{P} &= \text{Div} (\mathbf{P}^T \mathbf{e}_\Theta) - \mathbf{P} : \nabla \mathbf{e}_\Theta \\ \mathbf{e}_Z \cdot \text{Div } \mathbf{P} &= \text{Div} (\mathbf{P}^T \mathbf{e}_Z) - \mathbf{P} : \nabla \mathbf{e}_Z \end{aligned}$$

Nous avons besoin des deux opérateurs gradient et divergence de vecteurs pour effectuer ce calcul. Rappelons que pour un vecteur $\mathbf{u} = u_R \mathbf{e}_R + u_\Theta \mathbf{e}_\Theta + u_Z \mathbf{e}_Z$, on a :

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_R}{\partial R} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_R}{\partial \Theta} - u_\Theta \right) & \frac{\partial u_R}{\partial Z} \\ \frac{\partial u_\Theta}{\partial R} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\Theta}{\partial \Theta} + u_R \right) & \frac{\partial u_\Theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial u_Z}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial u_Z}{\partial \Theta} & \frac{\partial u_Z}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (15)$$

On en déduit la divergence $\text{Div } \mathbf{u} := \text{Tr}(\nabla \mathbf{u})$:

$$\text{Div } \mathbf{u} = \frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\Theta}{\partial \Theta} + u_R \right) + \frac{\partial u_Z}{\partial Z} \quad (16)$$

Nous trouvons deux gradients de la base locale :

$$\nabla \mathbf{e}_R = \frac{1}{R} \mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_\Theta, \quad \nabla \mathbf{e}_\Theta = -\frac{1}{R} \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_\Theta$$

Tout calcul fait, il reste deux équations scalaires pour le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \left(\mu \frac{\partial r}{\partial R} - \frac{p}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \left(\mu \frac{\partial r}{\partial R} - \frac{p}{\partial R} \right) - \frac{1}{R} \left(\mu \frac{r}{R} - \frac{p}{R} \right) &= \rho_0 \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \\ -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial p}{\partial Z} &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \end{aligned}$$

dans lesquelles nous avons déjà résolu la variation du rayon :

$$\begin{aligned} r(R) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} \sqrt{(R^2 - a^2) + \lambda(a + u_a)^2} \\ \frac{\partial r}{\partial R} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} \frac{R}{\sqrt{(R^2 - a^2) + \lambda(a + u_a)^2}} \end{aligned}$$

Pour faciliter la recherche du champ de pression dans le matériau, on effectue un changement de variable :

$$h(R) := \mu \frac{\partial r}{\partial R} - \frac{p}{\frac{\partial r}{\partial R}}, \quad p(R) = \frac{\partial r}{\partial R} \left[\mu \frac{\partial r}{\partial R} - h(R) \right]$$

Cette équation peut être résolue en utilisant le calcul formel.

TRANSFORMATION EN GLISSEMENT SIMPLE

Nous proposons une sorte d'exercice corrigé pour illustrer le comportement en glissement simple d'un matériau de Kirchhoff-St Venant.

Glissement simple : Énoncé On considère un milieu continu \mathcal{B} dont densité dans la configuration initiale ρ_0 est supposée uniforme. Dans tout le problème nous utiliserons un système d'axes orthonormés direct $(O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$ par rapport auquel les deux configurations initiale et déformée sont définies. La transformation homogène à étudier $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \varphi(\mathcal{B})$ est le glissement simple sinusoidal :

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) = [X_1 + X_2 \gamma \sin(\omega t)] \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3 \quad \gamma > 0$$

1. Calculer les tenseurs de déformation de CAUCHY-GREEN \mathbf{C} et de GREEN-LAGRANGE \mathbf{E} .
2. On suppose que le champ de température reste uniforme dans \mathcal{B} (et dans $\varphi(\mathcal{B})$) et constante $\forall t \geq 0$. Il n'y a pas d'apport de chaleur ni sur la frontière $\partial\mathcal{B}$ ni dans le volume \mathcal{B} . La loi du comportement du milieu continu est définie par son énergie libre de HELMHOLTZ :

$$\psi(\mathbf{C}) = \frac{\lambda}{2} \text{Tr}^2 \mathbf{E} + \mu \text{Tr} \mathbf{E}^2$$

dans laquelle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $\mu \in \mathbb{R}_+$ sont des constantes du matériau. On notera ρ_0 la densité du matériau dans sa configuration initiale.

- (a) Calculer le second tenseur de contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF \mathbf{S} en fonction de \mathbf{E} pour une transformation quelconque du milieu continu. Appliquer pour le cas du glissement simple sinusoidal.
- (b) Exprimer la puissance de déformation par unité de volume initial (dV) lors du glissement simple sinusoidal. Calculer le travail de déformation interne au cours d'un cycle $t_i = 0 \leq t \leq t_f = \frac{2\pi}{\omega}$. Considérer le cas où t_f est quelconque.
3. A partir de la configuration déformée $\varphi(\mathcal{B})$ due au glissement simple sinusoidal, on superpose un mouvement rigide défini par une rotation $\mathbf{Q}(t)$ autour de l'axe $O\mathbf{e}_3$ et d'angle $\alpha(t)$ suivie d'une translation $\mathbf{x}_0(t)$. La composition du glissement simple sinusoidal et du mouvement rigide est notée $\mathbf{x}^* = \varphi^*(X, t)$.
 - (a) Donner l'expression du second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF \mathbf{S}^* en fonction du tenseur de GREEN-LAGRANGE \mathbf{E}^* pour la transformation composée φ^* .
 - (b) Calculer les tenseurs de contrainte de CAUCHY dans les deux cas suivants
 - i. σ lors de la transformation glissement simple sinusoidal $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$,
 - ii. σ^* lors de la transformation composée $\mathbf{x}^* = \varphi^*(\mathbf{X}, t)$. Commenter.

Glissement simple : Solution La transformation homogène à étudier $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \varphi(\mathcal{B})$ est le glissement simple sinusoidal :

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) = [X_1 + X_2 \gamma \sin(\omega t)] \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3 \quad \gamma > 0$$

1. Ce qui nous donne directement la matrice du gradient de la transformation \mathbf{F} :

$$F_{iI} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le tenseur métrique de Cauchy-Green est directement calculé par $\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F}$:

$$C_{IJ} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \sin(\omega t) & 0 \\ \gamma \sin(\omega t) & 1 + \gamma^2 \sin^2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La déformation de Green-Lagrange $\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbb{I})$ devient :

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \gamma \sin(\omega t) & 0 \\ \gamma \sin(\omega t) & \gamma^2 \sin^2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La contrainte de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} pour cette énergie libre isotherme prend la forme classique (modèle de matériau de Kirchhoff-St venant) en utilisant l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\left(\mathbf{S} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} \right) : \dot{\mathbf{E}} \geq 0 \quad \implies \quad \mathbf{S} = \lambda \rho_0 \text{Tr} \mathbf{E} \mathbb{I} + 2\mu \rho_0 \mathbf{E}$$

dans laquelle on peut absorber la densité dans les constantes pour écrire :

$$\mathbf{S} = \lambda \text{Tr} \mathbf{E} \mathbb{I} + 2\mu \mathbf{E}$$

Pour le glissement simple, les composantes s'écrivent en calculant d'abord la trace de \mathbf{E} :

$$\text{Tr} \mathbf{E} = \frac{1}{2} \gamma^2 \sin^2(\omega t)$$

puis la matrice des contraintes :

$$S_{IJ} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} \gamma^2 \sin^2(\omega t) & \mu \gamma \sin(\omega t) & 0 \\ \mu \gamma \sin(\omega t) & \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) \gamma^2 \sin^2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} \gamma^2 \sin^2(\omega t) \end{pmatrix}$$

3. Pour la puissance de déformation, il est nécessaire de calculer la vitesse de déformation :

$$\dot{E}_{IJ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \omega \gamma \cos(\omega t) & 0 \\ \omega \gamma \cos(\omega t) & 2\gamma^2 \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En exprimant la densité de la puissance de déformation $P_d := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} dV$, on obtient :

$$p_d := \frac{dP_d}{dV} = \mu \gamma^2 \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) \gamma^4 \sin^3(\omega t) \cos(\omega t)$$

Le travail de interne déformation au cours du cycle est donné par :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} p_d dt = \left[\frac{\mu}{2} \gamma^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) \gamma^4 \sin^4(\omega t) \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0 \geq 0$$

Par contre, nous constatons que le travail de déformation est toujours positif ou nul. Ceci est toujours vrai dans le cas où :

$$\mu \geq 0, \quad \frac{\lambda}{2} + \mu \geq 0.$$

Ces deux inégalités traduisent aussi la positivité du tenseur d'élasticité \mathbb{E}_{ijkl} du matériau.

4. De l'exercice précédent sur l'indifférence matérielle, on a montré que les tenseurs $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}$, $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}$ et par conséquent $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}$ ne sont pas modifiés par un mouvement rigide supplémentaire. Pour calculer la contrainte de Cauchy σ , il suffit de calculer :

$$\sigma = \frac{1}{\text{Det}\mathbf{F}} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T$$

De même, l'exercice précédent nous a permis de montrer que :

$$\sigma^* = \mathbf{Q} \sigma \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATÉRIAUX À DISSIPATION NORMALE

D'une manière générale, les matériaux élastiques sont des exemples particuliers de milieux à dissipation normale avec $\chi = 0$. Nous donnons dans cette partie quelques exemples de milieux à dissipation normale.

Solide viscoélastique de Kelvin-Voigt. Pour généraliser en tridimensionnel et en transformations finies le modèle discret d'un ressort en parallèle avec un amortisseur, on définit le matériau viscoélastique de Kelvin-Voigt en considérant l'énergie libre et le potentiel de dissipation suivants :

$$\psi(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2} \text{Tr}^2 \mathbf{E} + \mu \text{Tr} \mathbf{E}^2, \quad \chi(\dot{\mathbf{E}}) = \frac{\lambda'}{2} \text{Tr}^2 \dot{\mathbf{E}} + \mu' \text{Tr} \dot{\mathbf{E}}^2 \quad (17)$$

La partie élastique est appelée matériau de Kirchhoff-St Venant et la partie visqueuse matériau de Newton. La contrainte de Piola-Kirchhoff correspondant s'écrit :

$$\mathbf{S} = \lambda \text{Tr} \mathbf{E} \mathbb{I} + 2\mu \mathbf{E} + \lambda' \text{Tr} \dot{\mathbf{E}} \mathbb{I} + 2\mu' \dot{\mathbf{E}} \quad (18)$$

Le potentiel de dissipation $\chi(\dot{\mathbf{E}})$ est convexe, positif et s'annule à l'origine $\dot{\mathbf{E}} = 0$. Cette loi de comportement respecte donc l'admissibilité thermodynamique.

Matériau thermoélastique découplé. On considère un matériau élastique conducteur de chaleur définie par son énergie libre et son potentiel de dissipation :

$$\psi(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2} \text{Tr}^2 \mathbf{E} + \mu \text{Tr} \mathbf{E}^2, \quad \chi(\nabla\theta) = \frac{\kappa}{2} \nabla\theta \cdot \nabla\theta \quad (19)$$

Le potentiel de dissipation $\chi(\nabla\theta)$ est convexe, positif et s'annule à l'origine $\nabla\theta = 0$. Cette loi de comportement est donc admissible si $\kappa \geq 0$. La contrainte matérielle, l'entropie et le flux de chaleur prennent la forme suivante :

$$\mathbf{S} = \lambda \text{Tr} \mathbf{E} \mathbb{I} + 2\mu \mathbf{E}, \quad s = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0, \quad \mathbf{Q} = -\kappa\theta\nabla\theta \quad (20)$$

En partant de l'équation de conservation de l'énergie, on trouve facilement l'équation de propagation de la chaleur suivante :

$$\text{Div}(\kappa\theta\nabla\theta) + \rho_0 r = 0$$

sachant que :

$$\mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}}, \quad \dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}}$$

En introduisant la relation tensorielle $\text{Div}(\kappa\theta\nabla\theta) = \kappa\theta \text{Div}(\nabla\theta) + \kappa\|\nabla\theta\|^2$, on a l'équation de propagation de la chaleur :

$$\kappa \Delta\theta + \kappa\|\nabla\theta\|^2 + \rho_0 r = 0 \quad (21)$$

Matériau thermoélastique de St Venant - Kirchhoff - Fourier. Le matériau thermoélastique est un exemple particulier où l'énergie libre de Helmholtz et le potentiel de dissipation prennent la forme :

$$\psi = \psi(\mathbf{E}, \theta), \quad \chi = \chi(\nabla\theta) \quad (22)$$

Le modèle le plus simple en transformations finies est défini par :

$$\psi = \frac{\lambda}{2} \text{Tr}^2 \mathbf{E} + \mu \text{Tr} \mathbf{E}^2 - (3\lambda + 2\mu) \alpha (\theta - \theta_0) \text{Tr} \mathbf{E} - \frac{c}{2\theta_0} (\theta - \theta_0)^2 \quad (23)$$

$$\chi = \frac{\kappa}{2} \nabla\theta \cdot \nabla\theta \quad (24)$$

Ce matériau est appelé matériau de Kirchhoff-St Venant - Fourier. Les constantes λ et μ sont les coefficients de Lamé, α le coefficient d'expansion thermique, c la chaleur spécifique et θ_0 une température de référence. La contrainte, l'entropie et le flux de chaleur dans ce matériau couplé sont donnés par :

$$\mathbf{S} = \lambda \text{Tr} \mathbf{E} \mathbb{I} + 2\mu \mathbf{E} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (\theta - \theta_0) \mathbb{I} \quad (25)$$

$$s = (3\lambda + 2\mu) \alpha \text{Tr} \mathbf{E} + \frac{c}{\theta_0} (\theta - \theta_0) \quad (26)$$

$$\mathbf{Q} = -\kappa \theta \nabla\theta \quad (27)$$

En considérant de nouveau la conservation de l'énergie, nous obtenons directement l'équation de propagation de la chaleur suivante :

$$\rho_0 \theta (3\lambda + 2\mu) \alpha \text{Tr} \dot{\mathbf{E}} + \rho_0 \frac{\theta}{\theta_0} c \dot{\theta} = \kappa \Delta\theta + \kappa \|\nabla\theta\|^2 + \rho_0 r \quad (28)$$

dans laquelle nous avons utilisé les relations :

$$\dot{s} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{E} \partial \theta} : \dot{\mathbf{E}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} : \dot{\theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} : \dot{\theta}$$

Remarques 0.9 *La présence de $\text{Tr} \dot{\mathbf{E}}$ dans l'équation de propagation de la chaleur implique que les équations mécaniques et thermiques sont couplées. Ce couplage est aussi une conséquence de la présence de la température dans la loi de comportement.*

ATTÉNUATION DES ONDES THERMOÉLASTIQUES

Dans cette section, nous essayons de montrer avec un modèle linéaire simple l'influence de la thermique sur la dynamique et la propagation des ondes élastiques dans un milieu continu. Pour cela, considérons un milieu homogène isotrope dont les lois de comportement sont définies par le potentiel énergie libre et le potentiel de dissipation thermique que nous avons développés au premier chapitre (matériaux simples au sens de Noll).

Atténuation thermoélastique des ondes : Énoncé

On considère un matériau thermoélastique tel que l'énergie libre de Helmholtz et le potentiel de dissipation s'écrivent en transformations finies :

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{\lambda}{2} \text{Tr}^2 \mathbf{E} + \mu \text{Tr} \mathbf{E}^2 - (3\lambda + 2\mu) \alpha (\theta - \theta_0) \text{Tr} \mathbf{E} - \frac{c}{2\theta_0} (\theta - \theta_0)^2 \\ \chi &= \frac{\kappa}{2} \nabla \theta \cdot \nabla \theta\end{aligned}$$

Les constantes λ et μ sont les coefficients de Lamé, α le coefficient d'expansion thermique, c la chaleur spécifique et θ_0 une température moyenne de référence. La contrainte, l'entropie et le flux de chaleur dans ce matériau couplé sont donnés par :

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \lambda \text{Tr} \mathbf{E} \mathbb{I} + 2\mu \mathbf{E} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (\theta - \theta_0) \mathbb{I} \\ s &= (3\lambda + 2\mu) \alpha \text{Tr} \mathbf{E} + \frac{c}{\theta_0} (\theta - \theta_0) \\ \mathbf{Q} &= -\kappa \theta \nabla \theta\end{aligned}$$

De même, en considérant de nouveau la conservation de l'énergie, nous obtenons directement l'équation de propagation de la chaleur :

$$\rho_0 \theta (3\lambda + 2\mu) \alpha \text{Tr} \dot{\mathbf{E}} + \rho_0 \frac{\theta}{\theta_0} c \dot{\theta} = \kappa \Delta \theta + \kappa \|\nabla \theta\|^2 + \rho_0 r$$

1. Ecrire les lois de conservation et les lois de comportement dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations (linéarisées).
2. Considérer une barre unidimensionnelle avec $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = u(X, t) \mathbf{e}_1$ et $\theta(\mathbf{X}, t) = \theta(X, t)$ et écrire les équations dans ce cas. Considérer les solutions ondes du type :

$$\begin{aligned}u(X, t) &= u_0 \exp [j (\omega t + k x)] \\ \theta(X, t) &= \theta_0 \exp [j (\omega t + k x)]\end{aligned}$$

3. Ecrire la condition nécessaire et suffisante pour que de telles solutions ondes existent. Montrer que les ondes mécaniques sont atténuées par l'existence du couplage en thermoélasticité.

Atténuation thermoélastique des ondes : Solution

Equations d'ondes thermoélastiques linéaires. Par la suite, nous allons nous limiter à l'hypothèse des petites perturbations (en déplacement et en température). Ce qui nous donne la contrainte et le flux de chaleur :

$$\begin{aligned}\sigma &= \lambda \text{Tr} \varepsilon \mathbb{I} + 2\mu \varepsilon - (3\lambda + 2\mu) \alpha (\theta - \theta_0) \mathbb{I} \\ \mathbf{q} &= -\kappa \theta_0 \nabla \theta \simeq -\kappa \nabla \theta\end{aligned} \tag{29}$$

en incluant la température moyenne θ_0 dans le coefficient de conductivité pour simplifier. En calculant la divergence et en linéarisant l'équation de propagation de la chaleur précédente, nous obtenons directement les deux équations couplées de la thermoélasticité linéaire :

$$(\lambda + \mu) \nabla (\text{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \nabla \theta = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{31}$$

$$\rho \theta_0 (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial (\text{div} \mathbf{u})}{\partial t} + \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \Delta \theta \tag{32}$$

dans laquelle les forces extérieures et la source de chaleur volumiques ont été laissées de côté, ainsi que les termes du second ordre.

Remarques 0.10 *Le couplage engendre quelques phénomènes intéressants. En effet, les ondes élastiques peuvent donc être engendrées dans des matériaux portés à haute température (dues par exemple à des pulsions laser). Cette génération d'ondes sans contact est entre autres appliquée pour le contrôle non destructif de matériaux et la mesure des constantes élastiques.*

Exemples d'ondes planes thermoélastiques. En considérant de nouveau la décomposition en ondes irrotationnelles (rotationnel nul) et ondes rotationnelles (divergence nulle), nous pouvons appliquer la méthode de Helmholtz en écrivant $\mathbf{u} = \nabla\Phi + \text{rot}\mathbf{H}$ dans laquelle nous rappelons que Φ et \mathbf{H} sont des potentiels scalaire et vectoriel respectivement. De même, rappelons que le choix d'un premier terme potentiel résulte de la propriété $\text{rot}\mathbf{H} = 0$ dans un milieu simplement connexe et du second que $\text{div}(\nabla\Phi) = 0$. Pour cet exemple, nous allons seulement étudier les ondes irrotationnelles en retenant $\mathbf{u} = \nabla\Phi$. L'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$(\lambda + \mu) \nabla(\Delta\Phi) + \mu\Delta(\nabla\Phi) - (3\lambda + 2\mu)\alpha \nabla\theta = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\Phi)$$

Puisque l'on peut intervertir les deux opérateurs $\Delta(\nabla\Phi) = \nabla(\Delta\Phi)$, alors on peut factoriser le gradient pour obtenir :

$$\nabla \left[(\lambda + 2\mu) \Delta\Phi - (3\lambda + 2\mu)\alpha \theta - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right] = 0$$

Dès lors, on observe que les termes entre crochets ne dépendent que du temps, que l'on peut sans nuire à la généralité égaliser à zéro. Il vient alors l'équation de vibrations linéaires en thermoélasticité (ondes irrotationnelles) :

$$(\lambda + 2\mu) \Delta\Phi - (3\lambda + 2\mu)\alpha \theta = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (33)$$

L'équation de propagation de la chaleur devient pour ces types d'ondes :

$$\rho\theta_0 (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial(\Delta\Phi)}{\partial t} + \rho c \frac{\partial\theta}{\partial t} = \kappa \Delta\theta \quad (34)$$

Remarques 0.11 *Ces deux équations sont couplées par la quantité $(3\lambda + 2\mu)\alpha$. L'annulation de ce terme permet de retrouver la thermoélasticité découplée qui n'est en fait que la superposition (sans interaction) de vibration élastique et de propagation de la chaleur, que nous appelons aussi "onde thermique".*

Pour simplifier, nous allons restreindre encore plus en considérant seulement un milieu continu unidimensionnel. Pour l'analyse modale, nous cherchons les solutions du type :

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \Phi_0 e^{j(kx + \omega t)} \\ \theta(x, t) &= \Theta_0 e^{j(kx + \omega t)} \end{aligned}$$

L'introduction de ces solutions dans les deux équations couplées nous donne la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} - k^2 & -\frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{\lambda + 2\mu} \\ -j\rho\theta_0 \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha}{\kappa} \omega k^2 & \frac{j\rho c_v \omega}{\kappa} + k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

On peut scinder en deux étapes l'analyse modale pour appréhender les phénomènes mis en jeu.

1. *Thermoélasticité découplée.* Pour $(3\lambda + 2\mu)\alpha = 0$, les solutions non nulles existent si et seulement si les deux expressions suivantes sont nulles :

$$\begin{aligned}\frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} - k^2 &= 0 \\ \frac{j\rho c_v\omega}{\kappa} + k^2 &= 0\end{aligned}$$

La première équation de dispersion (mécanique) donne les ondes élastiques linéaires longitudinales classiques dont les nombres d'ondes sont donnés par :

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} := k_M^2$$

La seconde relation de dispersion "thermique" peut être analysée en remarquant que :

$$(1 - j)^2 = -2j, \quad \implies \quad -j = \left(\frac{1 - j}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Ce qui nous permet d'écrire pour l'onde "thermique" :

$$k = \pm(1 - j) \sqrt{\frac{\rho c \omega}{2\kappa}}, \quad k_T^2 := -\frac{j\rho c_v\omega}{\kappa}$$

Remarques 0.12 Cette solution montre qu'il existe une onde thermique dont le nombre d'onde est un nombre complexe. Cette onde est une onde évanescente qui tend asymptotiquement et très rapidement vers 0 dans le matériau.

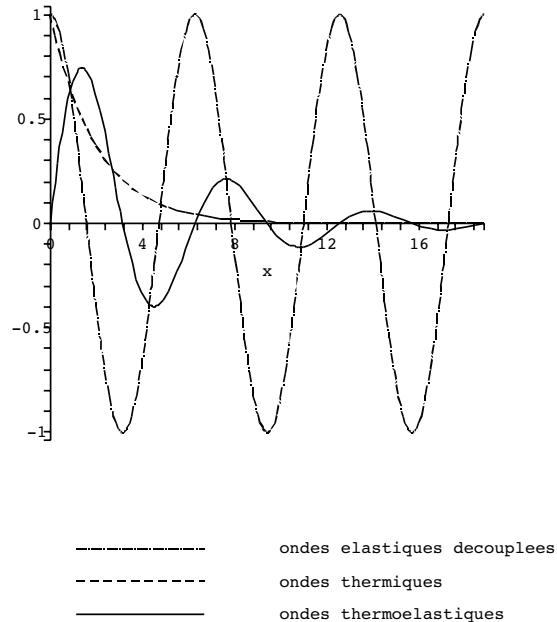


FIG. 6 – Formes générales des ondes élastiques, ondes thermiques et ondes thermoélastiques.

2. *Thermoélasticité couplée.* Le couplage est effectif dès que $(3\lambda + 2\mu)\alpha \neq 0$. Dans ce cas, des solutions $\Phi_0 \neq 0$ et $\Theta_0 \neq 0$ existent si et seulement si le déterminant est nul :

$$(k^2 - k_M^2)(k^2 - k_T^2) - j \frac{\theta_0 (3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2}{\kappa \omega} k_M^2 k^2 = 0$$

En arrangeant les différents termes, nous aboutissons à une équation du second ordre en k^2 :

$$k^4 - \left[k_M^2 + k_T^2 + j \frac{\theta_0 (3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2}{\kappa \omega} k_M^2 \right] k^2 + k_M^2 k_T^2 = 0$$

Cette équation du second ordre admet en général quatre solutions complexes du type :

$$\begin{aligned} k_1 &= \pm (k_{1r} + jk_{1i}), & k_{1r}, k_{1i} &\in \mathbb{R} \\ k_2 &= \pm (k_{2r} + jk_{2i}), & k_{2r}, k_{2i} &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ces nombres d'ondes complexes montrent de nouveau qu'en thermoélasticité, les ondes mécaniques et thermiques sont en général couplées et que le couplage influence les ondes élastiques en atténuant ces ondes de manière significative.

Remarques 0.13 *On peut admettre un découplage dans les deux situations où soit le coefficient de dilatation est très faible soit la conductivité du matériau est extrêmement élevée.*