

**ELEMENTS DE DYNAMIQUE
DES SOLIDES ET
STRUCTURES DEFORMABLES**

Lalaonirina R. RAKOTOMANANA

Université de Rennes 1

Notes de cours 2005-2006

2 février 2006

Préface

Durant la conception d'une structure mécanique au sens large du terme, certains paramètres de départ sont imposés (encombrement, poids, contraintes limites, durée de vie, prix, etc ...), le problème est souvent de déterminer de manière rationnelle ou par un choix judicieux, aidé par un calcul préliminaire, les paramètres restant afin d'assurer le bon fonctionnement du système. Dans le cadre des sollicitations statiques d'un élément de la structure, la résolution du problème fait souvent appel à la notion de résistance des matériaux ou à la mécanique des milieux continus. Une analyse statique donne des indications capitales quant à la résistance aux sollicitations des structures mais dans la réalité, le contrôle des vibrations et des ondes s'avère indispensable. L'étude dynamique, principalement la formulation et l'intégration des équations du mouvement d'un système de solides rigides, se base sur les cours de mécanique générale ou analytique. Les vibrations des systèmes discrets sont ainsi traitées dans le cours de mécanique générale et analytique au niveau de la licence de mécanique. L'objet de ce cours de DYNAMIQUE DES SOLIDES ET DES STRUCTURES LINÉAIRES, donné depuis quelques années aux étudiants de master de mécanique de l'Université de Rennes 1 en deux parties "Coques et Plaques" et "Ondes et Vibrations" respectivement, est de traiter les bases nécessaires pour l'analyse du comportement dynamique des solides déformables : poutres, coques, plaques et milieux continus. L'accent est porté sur la méthode de la décomposition dans la base modale. D'une manière générale, les vibrations et ondes dans les structures mécaniques peuvent causer des dommages :

1. elles engendrent la ruine de la structure ou la défaillance de ses constituants par rupture (fatigue par endommagement ou dépassement de contrainte élastique), d'une part,
2. de l'autre, elles sont souvent source de défauts de fabrication pour les produits notamment lors d'un usinage des pièces mécaniques.

Néanmoins, il arrive que les vibrations soient aussi utilisées dans certaines machines telles les vibreurs mécaniques, les polisseurs à vibrations, les transporteurs à vibrations, les moteurs à ultrasons, la liste étant longue mais le sujet trouverait sa juste place dans un livre à orientation un peu plus technologique. Qu'elles soient utiles ou nuisibles, on est souvent amené à analyser, par la modélisation théorique et/ou les mesures expérimentales, les origines possibles de ces vibrations et les atténuer voire les supprimer ou au contraire les améliorer selon les besoins, en un mot les contrôler.

L'analyse des vibrations et ondes dans les structures mécaniques devra ainsi porter sur trois points essentiels :

1. l'environnement vibratoire (les forces extérieures)
2. la structure elle-même
3. la réponse de la structure due aux forces extérieures.

Le fil conducteur de ce cours se base sur cette réflexion. Ainsi, l'étude du comportement vibratoire d'une structure quelconque présente dans la plupart des cas deux étapes principales :

1. (*Vibrations libres*) La détermination des caractéristiques dynamiques de la structure (fréquences et modes propres de vibrations)
2. (*Vibrations forcées*) L'analyse en fréquence ou temporelle de la réponse de la structure suite à un environnement (force d'excitation extérieure).

Résumé du cours. Ce cours est une introduction aux *vibrations linéaires des solides et des structures* ainsi qu'aux ondes qui s'y propagent. Une structure mécanique (ou système mécanique) peut être raisonnablement schématisée par des lignes (cordes, poutres), des surfaces planes ou gauches (membranes, plaques, coques) ou des volumes. L'objectif principal de ce cours est de montrer que la vibration linéaire de la plupart des structures élastiques peut être décrite par un système d'équations différentielles ordinaires de la forme :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t)$$

dans laquelle \mathbf{M} , \mathbf{D} et \mathbf{K} sont respectivement la matrice masse, la matrice d'amortissement et la matrice de rigidité. $\mathbf{X}(t)$ est le vecteur déplacement généralisé et $\mathbf{F}(t)$ la force d'excitation généralisée de la structure. Suivant le cas, cette équation générique peut être approchée ou exacte. Pour un système discret le nombre d'équations est fini. Pour les systèmes continus comme les poutres, les plaques, les coques et les milieux continus tridimensionnels le nombre d'équations est infini. Dans chaque chapitre, le fil conducteur est de ramener les équations du mouvement de chaque structure à cette équation générique et de définir ces matrices. Les matrices \mathbf{M} , \mathbf{D} et \mathbf{K} sont en général pleines, en tout cas non diagonales, le principe sous-jacent de l'analyse modale est de chercher un nouveau système de coordonnées $\mathbf{q}(t)$ en utilisant une transformation linéaire :

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{R} \mathbf{q}(t)$$

dans laquelle la matrice \mathbf{R} est formée par les modes propres de vibrations de la structure. Ceci fera l'objet d'un développement important et montré dans chaque chapitre. La matrice \mathbf{R} est appelée matrice des modes propres. L'application de cette transformation linéaire nous amène à une autre écriture de l'équation de vibration de la structure :

$$\mathcal{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathcal{D} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathcal{K} \mathbf{q}(t) = \mathcal{F}(t)$$

dans laquelle \mathcal{M} , \mathcal{D} et \mathcal{K} sont respectivement la matrice masse modale généralisée, la matrice d'amortissement modale généralisée et la matrice de rigidité modale généralisée. Les deux vecteurs $\mathbf{q}(t)$ et $\mathcal{F}(t)$ sont les coordonnées et la force d'excitation modales généralisées. Les conditions d'orthogonalité des modes propres, signifiant une diagonalisation possible de ces matrices, seront développées dans ce

livre.

Dans chaque chapitre, la résolution analytique de problèmes, simples ou un peu moins simples suivant le cas, a été aussi privilégiée pour permettre à l'étudiant de "sentir" les solutions. Ce livre n'est pas un traité sur les vibrations et ondes mécaniques, loin de là. Il ne vise qu'à susciter la curiosité des étudiants sur quelques aspects des vibrations et ondes mécaniques dans leur cursus universitaire ou plus tard professionnel. La recherche de l'équilibre entre l'abstraction mathématique et l'intuition mécanique a été un leitmotiv durant toute la rédaction de ce livre, les étudiants concernés venant de divers horizons des masters de mécanique, de physique et de mathématiques appliquées. Il y a certainement bien d'améliorations à faire sur ce point et tout commentaire et remarque sont les bienvenus tant sur le contenu que sur la forme.

Il faut admettre que rechercher cette voie d'équilibre n'est pas facile et sans risque, notamment de heurter à la fois les théoriciens et les expérimentateurs. Nous l'avons adopté en rappelant ces quelques lignes sur *La Théorie et l'Expérience*. " *Dans toute expérimentation il y a un résidu abstrait, et dans toute abstraction (mathématique), il y a un résidu intuitif. Ils suffisent pour nous faire comprendre que la distinction entre l'abstrait et l'expérimental, si l'on remonte assez haut, s'estompe et disparaît : ce sont les deux béquilles de notre effort de compréhension du monde. Elles ont le même fondement, et concourent aux mêmes fins, quelquefois par des voies communes, et quelquefois par des voies opposées. Nous résumons nos conclusions en ces termes : La distinction entre l'abstrait et l'expérimental n'est que tendances, mais non d'essence.*" (Les Fondements des Mathématiques, Ferdinand Gonseth, 1926)

A la fin de chaque chapitre, une série d'exercices et de problèmes est proposée pour assimiler les notions de base. La formulation des équations dynamiques par le *Principe des Puissances Virtuelles* est également traitée pour amener l'étudiant à manipuler la formulation variationnelle pour la résolution numérique des structures plus compliquées, sachant que des séances de travaux pratiques de simulation numérique par la méthode des éléments finis et d'analyse modale font partie intégrante de ces cours à l'Université de Rennes 1.

Tout enseignement n'est en fait qu'une transmission de savoir, si modeste soit-il. La conception et la mise en forme de cet enseignement dépendent en grande partie des maîtres qu'on a eus, directement ou indirectement par les lectures de livres ou articles. Ils nous ont fourni la substance. La forme de cet enseignement et quelquefois le contenu sont affinés en permanence, année après année, dans une large mesure, grâce aux élèves qui ont suivi cet enseignement. Cette contribution est loin d'être négligeable. Que les uns et les autres, dont la liste serait très longue, trouvent en ces quelques lignes ma sincère gratitude et ma reconnaissance.

Thorigné-Fouillard, Février 2006.

Table des matières

| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Eléments de thermomécanique | 13 |
| 1.1 | Mécanique des milieux continus | 13 |
| 1.1.1 | Concept de milieu continu | 13 |
| 1.1.2 | Déformation d'un milieu continu | 15 |
| 1.1.3 | Lois de conservation des milieux continus | 27 |
| 1.1.4 | Lois de comportement des milieux continus | 39 |
| 1.2 | Mécanique des matériaux élastiques | 45 |
| 1.2.1 | Elasticité linéaire | 45 |
| 1.2.2 | Thermoélasticité en transformations finies | 52 |
| 1.3 | Matériaux viscoélastiques à effet mémoire | 69 |
| 1.3.1 | Modèles viscoélastiques linéaires discrets | 69 |
| 1.3.2 | Modèles viscoélastiques linéaires | 73 |
| 1.3.3 | Modèles viscoélastiques en transformations finies | 83 |
| 1.4 | Exercices | 91 |
| 1.4.1 | Déformation des milieux continus | 91 |
| 1.4.2 | Éléments de dérivation tensorielle | 96 |
| 1.4.3 | Contraintes dans les milieux continus | 97 |
| 1.4.4 | Matériaux élastiques et viscoélastiques | 100 |
| 1.4.5 | Thermomécanique | 108 |
| 2 | Dynamique des poutres élastiques | 113 |
| 2.1 | Equations dynamiques des poutres | 114 |
| 2.1.1 | Caractéristiques d'une poutre | 115 |
| 2.1.2 | Equilibre des poutres en translation | 116 |
| 2.1.3 | Equilibre des poutres en rotation | 117 |
| 2.1.4 | Equation dynamique de la translation | 119 |
| 2.1.5 | Equation dynamique de la rotation | 120 |
| 2.2 | Ondes et vibrations dans les cordes | 122 |
| 2.2.1 | Equations locales des cordes | 122 |
| 2.2.2 | Vibrations transversales libres d'une corde finie | 127 |
| 2.2.3 | Vibrations transversales forcées d'une corde | 134 |
| 2.2.4 | Intégration numérique par la méthode des trapèzes | 144 |
| 2.3 | Puissance de déformation et variables duales | 146 |
| 2.3.1 | But du chapitre | 146 |
| 2.3.2 | Cinématique d'une poutre | 147 |
| 2.3.3 | Puissance de déformation interne | 150 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.3.4 | Poutres élastiques | 153 |
| 2.4 | Vibrations en flexion des poutres droites | 156 |
| 2.4.1 | Equations dynamiques de la poutre | 157 |
| 2.4.2 | Vibrations libres d'une poutre EB en flexion | 162 |
| 2.4.3 | Vibrations forcées d'une poutre EB en flexion | 171 |
| 2.4.4 | Vibrations des poutres EB viscoélastiques | 182 |
| 2.4.5 | Vibrations libres des poutres de Timoshenko | 184 |
| 2.4.6 | Vibrations forcées des poutres de Timoshenko | 197 |
| 2.5 | Eléments de vibrations des poutres courbes | 201 |
| 2.5.1 | Géométrie des courbes 3D | 201 |
| 2.5.2 | Equations générales des poutres courbes | 203 |
| 2.6 | Exercices | 205 |
| 2.6.1 | Cordes | 205 |
| 2.6.2 | Poutres d'Euler-Bernoulli | 208 |
| 2.6.3 | Poutres de Timoshenko | 216 |
| 2.6.4 | Méthodes approchées | 223 |
| 2.7 | Compléments sur les poutres linéaires | 226 |
| 2.7.1 | Equations de Timoshenko | 226 |
| 2.7.2 | Equations des poutres de Timoshenko en 3D | 228 |
| 2.7.3 | Poutres avec éléments ponctuels | 230 |
| 3 | Plaques minces | 231 |
| 3.1 | Géométrie des plaques minces | 231 |
| 3.1.1 | Base tangente et métrique | 231 |
| 3.1.2 | Dérivée covariante (ou Dérivée "absolue") | 234 |
| 3.2 | Déformation des plaques minces | 236 |
| 3.2.1 | Vecteur déplacement et hypothèses | 236 |
| 3.2.2 | Tenseur de déformation des plaques minces | 237 |
| 3.3 | Plaque de Mindlin-Reissner | 238 |
| 3.3.1 | Rappel : Principe des puissances virtuelles | 238 |
| 3.3.2 | Hypothèse de Kirchhoff | 240 |
| 3.3.3 | Puissance virtuelle des déformations | 241 |
| 3.3.4 | Puissance virtuelle des efforts extérieurs | 243 |
| 3.3.5 | Formulation variationnelle de l'équilibre | 243 |
| 3.3.6 | Equations locales de l'équilibre | 245 |
| 3.3.7 | Théorème de Cauchy - Conditions aux limites | 248 |
| 3.4 | Plaque de Love-Kirchhoff | 251 |
| 3.4.1 | Puissance virtuelle des liaisons | 252 |
| 3.4.2 | Conditions aux limites | 253 |
| 3.4.3 | Conditions aux limites : cas particuliers | 254 |
| 3.5 | Plaques minces élastiques | 257 |
| 3.5.1 | Milieux continus élastiques | 257 |
| 3.5.2 | Plaques élastiques linéaires homogènes et isotropes | 260 |
| 3.5.3 | Plaque avec effort tranchant transverse | 260 |
| 3.5.4 | Flexion d'une plaque linéaire isotrope | 262 |
| 3.6 | Exercices | 268 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.6.1 | Coordonnées curvilignes | 268 |
| 3.6.2 | Plaques | 268 |
| 4 | Coques minces | 279 |
| 4.1 | Géométrie des coques minces | 280 |
| 4.1.1 | Base tangente et métrique | 280 |
| 4.1.2 | Dérivée covariante (ou Dérivée "absolue") | 281 |
| 4.1.3 | Courbure d'une surface | 283 |
| 4.2 | Déformation des coques minces | 285 |
| 4.2.1 | Vecteur déplacement et hypothèses | 286 |
| 4.2.2 | Tenseur de déformation des coques minces | 286 |
| 4.2.3 | Exemples de tenseur de déformation | 289 |
| 4.2.4 | Tenseur de déformation (compléments) | 292 |
| 4.3 | Equations d'équilibre | 294 |
| 4.3.1 | Formulation variationnelle | 295 |
| 4.3.2 | Formulation locale de l'équilibre | 299 |
| 4.4 | Coque avec conservation de la normale | 307 |
| 4.4.1 | Principe des Puissances Virtuelles | 307 |
| 4.4.2 | Conditions aux limites | 311 |
| 4.5 | Coques minces élastiques | 312 |
| 4.5.1 | Loi de comportement élastique | 312 |
| 4.5.2 | Coques élastiques linéaires homogènes et isotropes | 313 |
| 4.5.3 | Lois de comportement avec effort tranchant transverse | 314 |
| 4.6 | Notions sur l'instabilité des plaques minces | 315 |
| 4.6.1 | Equations du flambement | 315 |
| 4.6.2 | Exemple d'une plaque rectangulaire | 316 |
| 4.7 | Exercices | 321 |
| 4.7.1 | Coordonnées curvilignes | 321 |
| 4.7.2 | Plaques planes | 321 |
| 4.7.3 | Coques tridimensionnelles | 322 |
| 4.7.4 | Plaques | 325 |
| 4.7.5 | Coques et membranes | 327 |
| 5 | Dynamique des plaques et coques | 331 |
| 5.1 | Vibrations des membranes planes | 331 |
| 5.1.1 | Membranes planes | 332 |
| 5.1.2 | Fréquences et modes propres des membranes | 336 |
| 5.1.3 | Orthogonalité des modes propres des membranes | 345 |
| 5.1.4 | Notions sur les vibrations forcées des membranes | 347 |
| 5.2 | Eléments de vibration des plaques | 355 |
| 5.2.1 | Tenseur de déformation des plaques | 355 |
| 5.2.2 | Comportement élastique des plaques | 356 |
| 5.2.3 | Vibrations des plaques : approche locale | 358 |
| 5.2.4 | Fréquences et modes propres des plaques | 365 |
| 5.2.5 | Vibration des plaques : formulation variationnelle | 376 |
| 5.2.6 | Notions de base sur les méthodes d'approximations | 382 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.3 | Exemples d'illustration | 383 |
| 5.3.1 | Equations des plaques circulaires | 384 |
| 5.3.2 | Vibrations de flexion de plaques minces circulaires | 386 |
| 5.3.3 | Cas d'une plaque annulaire encastrée sur son pourtour | 390 |
| 5.3.4 | Exemple de simulation d'une guitare acoustique | 397 |
| 5.4 | Éléments de vibrations des coques | 398 |
| 5.4.1 | Membranes tridimensionnelles | 399 |
| 5.4.2 | Tenseur de déformation des coques | 403 |
| 5.4.3 | Equations de vibrations des coques (approche locale) | 404 |
| 5.4.4 | Vibrations des coques : formulation variationnelle | 411 |
| 5.5 | Exercices | 422 |
| 5.5.1 | Membranes | 422 |
| 5.5.2 | Plaques | 424 |
| 5.5.3 | Coques élastiques | 426 |
| 6 | Ondes et vibrations visco-élastiques 3D | 429 |
| 6.1 | Equations de Navier | 430 |
| 6.1.1 | Equations locales de l'élasticité linéaire | 431 |
| 6.1.2 | Equations de Navier | 431 |
| 6.1.3 | Liaisons internes et externes | 434 |
| 6.2 | Ondes élastiques dans un milieu continu 3D | 438 |
| 6.2.1 | Mise en évidence des ondes | 438 |
| 6.2.2 | Résolution par la décomposition des ondes | 440 |
| 6.2.3 | Notions sur les milieux anisotropes | 445 |
| 6.3 | Discrétisation des équations par le PPV | 449 |
| 6.3.1 | Motivation | 449 |
| 6.3.2 | Principe des puissances virtuelles | 449 |
| 6.3.3 | Semi-discrétisation (Décomposition dans une base) | 452 |
| 6.4 | Vibration linéaire des milieux viscoélastiques | 454 |
| 6.4.1 | Equations semi-discrétisées du mouvement | 454 |
| 6.4.2 | Analyse modale | 456 |
| 6.4.3 | Vibrations forcées (déterministes) | 457 |
| 6.4.4 | Notions sur les réponses aux chocs | 461 |
| 6.4.5 | Remarques générales | 465 |
| 6.4.6 | Tube viscoélastique en vibrations radiales | 466 |
| 6.5 | Ondes élastiques dans un milieu semi-infini | 470 |
| 6.5.1 | Classification des ondes dans un milieu semi-infini | 470 |
| 6.5.2 | Ondes de surfaces de Rayleigh <i>SV</i> (Shear Vertical) | 473 |
| 6.5.3 | Reflections d'onde à la surface | 477 |
| 6.5.4 | Ondes guidées de Rayleigh-Lamb dans les plaques | 485 |
| 6.6 | Notions sur les ondes thermoélastiques | 489 |
| 6.7 | Exercices | 493 |
| 6.7.1 | Equations locales de l'élasticité linéaire | 493 |
| 6.7.2 | Exercices sur les ondes et vibrations | 496 |
| 6.8 | Compléments : Notion élémentaire d'analyse spectrale | 506 |

| | | |
|----------|--|------------|
| A | Eléments de mathématiques | 515 |
| A.1 | Impulsion de Dirac | 515 |
| A.1.1 | Notions sur les distributions | 515 |
| A.1.2 | Propriétés élémentaires | 516 |
| A.2 | Transformations intégrales | 517 |
| A.2.1 | Transformée de Fourier des fonctions intégrables | 517 |
| A.2.2 | Transformée de Fourier des fonctions à énergie finie | 519 |
| A.2.3 | Transformée de Laplace | 519 |
| A.3 | Compléments sur les équations de Bessel | 520 |
| A.3.1 | Equation différentielle de Bessel d'ordre 0 | 520 |
| A.3.2 | Equation différentielle de Bessel | 521 |
| A.3.3 | Equation différentielle de Bessel modifiée | 523 |

??

Bibliographie

- [1] Antman SS. The eversion of thick spherical shells, *Arch Rat Mech Analysis*, 70, 1979, pp 113-123.
- [2] Bernadou M. *Méthodes des éléments finis pour les problèmes de coque mince* Masson, Paris, 1994.
- [3] Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée I partie, *Ann Ec Norm*, 40, 1923, p 325.
- [4] Chapelle D, Bathe KJ. Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures, *Comput Struct*, 66, 1998, pp 19-36.
- [5] Chapelle D, Oliveira DL, Bucalem ML. MITC elements for a classical shell model, *Comput Struct*, 81, 2003, 523-533.
- [6] Chinosi C, Della Croce L, Scapolla T. Hierarchic finite elements for thin Naghdi shell model, *Int J Solids Struct*, 35, 1998, pp 1863-1880.
- [7] Coleman BD, Noll W. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity, *Arch Rat Mech Anal*, 13, 1963, pp 167-170.
- [8] Curnier A *Méthodes numériques en mécanique des solides* PPUR, Lausanne, 1993.
- [9] Curnier A *Mécanique des solides déformables 1 : Cinématique, dynamique, énergétique* PPUR, Lausanne, 2005.
- [10] Curnier A, Rakotomanana RL. Generalized strain and stress measures : Critical survey and new results, *Eng Trans Polish Academy of Sciences*, 39, 3-4, 1991, pp 461-538.
- [11] Del Pedro M, Pahud P. *Mécanique vibratoire*, PPUR, Lausanne, 1989.
- [12] Destuynder P, Salaun M. A mixed finite element for shell model with free edge boundary conditions : Part 1 The mixed variational formulation, *Comput Methods Appl Mech Engng*, **120**, 1995, pp 195-217.
- [13] Destuynder P, Salaun M. A mixed finite element for shell model with free edge boundary conditions : Part 2 The numerical scheme, *Comput Methods Appl Mech Engng*, **120**, 1995, pp 219-242.
- [14] Destuynder P, Salaun M. A mixed finite element for shell model with free edge boundary conditions : Part 2 Numerical aspects, *Comput Methods Appl Mech Engng*, **136**, 1996, pp 273-292.
- [15] Ekwaro-Osire S, Maithripala DHS, Berg JM. A series expansion approach to interpreting the spectra of the Timoshenko beam, *J Sound Vibration*, **240** (4), 2001, pp 667-678.

- [16] Engel G, Garikipati K, Hughes TJR, Larson MG, Mazzei L, Taylor RL. Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity, *Comp Meth Applied mech Engng*, 191, 2002, 3669-3750.
- [17] Eringen AC. A unified theory of thermomechanical materials. *Int J Eng Sci*, 4, 1966, pp 179-202.
- [18] Eringen C, Editor. *Continuum physics. Volume II : Continuum mechanics of single substance bodies*, Academic Press, New-York, 1975.
- [19] Flugge W. *Tensor analysis and continuum mechanics*, Springer Verlag, Heidelberg, 1972.
- [20] Frankel Th. *The geometry of physics : An introduction*. Cambridge University Press, New-York, 1997.
- [21] Gérardin M, Rixen D. *Mechanical vibrations*, Wiley, Chichester, 1994.
- [22] Germain P. La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, *J Mécanique*, 12/2, 1973, pp 235-274.
- [23] Germain P. *Mécanique des milieux continus*, Editions Masson, 1973.
- [24] Germain P. *Mécanique*, 2 tomes, Editions Ellipse X, 1986.
- [25] Germain P, Nguyen QS, Suquet P. Continuum thermodynamics, *J Applied Mech, Trans ASME*, vol 50, 1983, pp 1010-1020.
- [26] Graff KF. *Wave motion in elastic solids*, Dover, New-York, 1991.
- [27] Green AE, Zerna W. *Theoretical elasticity*, Oxford University Press, Oxford, 1975.
- [28] Gurtin ME, Williams WO. An axiomatic foundations for continuum thermodynamics, *Arch Rat Mech Anal*, 26, 1967, pp 83-117.
- [29] Han SM, Benaroya H, Wei T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories, *J Sound Vibration*, **225** (5), 1999, pp 935-988.
- [30] Haupt P. *Continuum mechanics and theory of materials*, 2nd edition, Springer-Verlag, 2000.
- [31] Hughes TJR. *The finite element method : Linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice Hall, New-Jersey, 1987.
- [32] Imbert JF. *Analyse des structures par éléments finis*. Cepadues Editions, Toulouse, 1979.
- [33] Jacobsen LS, Ayre RS. *Engineering vibrations : With applications to structures and machinery*. Mac-Graw Hill, new-York, 1958.
- [34] Le Tallec P. *Introduction à la dynamique des structures*, Ellipses, Paris, 2000.
- [35] Libai A, Simmonds JG. *The nonlinear theory of elastic shells* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [36] Lovelock D, Rund H. *Tensors, differential forms and variational principles*, Wiley, New-York, 1975.

- [37] Malvern LE. Introduction to the mechanics of a continuous medium, Prentice-Hall, Series in *Engineering of the Physical Sciences*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- [38] Mandel J. *Introduction à la mécanique des milieux continus déformables*, Editions scientifiques de Pologne, Varsovie, 1975.
- [39] Mansfield EH. *The bending and stretching of plates*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [40] Marsden JE, Hughes TJR. *Mathematical foundations of elasticity*, Prentice-Hall, 1983.
- [41] Maugin GA. *The thermomechanics of plasticity and fracture*, Cambridge University press, Cambridge, 1992.
- [42] Muller P, Ossadzw C. *Introduction aux coques minces élastiques*, Hermes, Paris, 1999.
- [43] Nagdhi P. *The theory of shells and plates* in *Mechanics of solids, vol. II* ed. by Truesdell C, Springer-Verlag, Heidelberg, 1984.
- [44] Noll W. Lectures on the foundations of continuum mechanics and thermodynamics, *Arch Rat Mech Anal*, 52, 1973, pp 62-93.
- [45] Novozhilov VV. *Thin shell theory*, Wolters-Noordhoof, Groningen, 1970.
- [46] Ottino JM. *The kinematics of mixing : stretching, chaos, and transport*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 2nd edition, 1997.
- [47] Patlashenko I, Givoli D, Barbone P. Time-stepping schemes for systems of Volterra integro-differential equations, *Comput Methods Appl Mech Engng*, **190**, 2001, pp 5691-5718.
- [48] Pioletti DP, Rakotomanana LR. Non-linear viscoelastic laws for soft biological tissues *Eur J Mech A/Solids*, 19, 2000, pp 749-759.
- [49] Pitkaranta J. Mathematical and historical reflections on the lowest-order finite element models of thin structures, *Comput Struct*, 81, 2003, pp 895-909.
- [50] Rakotomanana RL, Contribution à la modélisation géométrique et thermodynamique d'une classe de milieux faiblement continus, *Arch Rat Mech Anal*, 141, 1997, pp 199-236.
- [51] Rakotomanana L. *A geometric approach to thermomechanics of dissipating continua*, *Progress in Mathematical Physics* Birkhauser, Boston, 2004.
- [52] Rakotomanana LR. Some class of strain gradient continuum models to connect various length scales in plastic deformation, in *Mechanics of Material Forces, Series : Advances in Mechanics and Mathematics*, Vol. 11, Steinmann P. Maugin GA (Eds.), Springer Verlag, 2005.
- [53] Rakotomanana LR, Ramaniraka NA. *Thermomechanics of bone-implant interfaces after cemented joint arthroplasty : Theoretical models and computational aspects*, in *Computational Bioengineering : Current trends and applications*, Ed. Cerrolaza M et al., Imperial College Press, London, 2004, pp 185-214.

- [54] Rakotomanana RL, Parenthoine D, Zekraoui MS, Roussin Y. Modal analysis of an acoustic guitar : influence of free edge boundary conditions, in *Structural Dynamics Eurodyn 2005*, vol. 2, Soize C, Schueller GI (Eds), Millpress, Rotterdam, pp 1227-1232, 2005.
- [55] Ramaniraka NA, Rakotomanana RL. Models of continuum with micro-crack distribution, *Math Mech Solids*, 5, 2000, pp 301-336.
- [56] Rose JL. *Ultrasonic waves in solid media*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [57] Serrin J. *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, in *Encyclopedia of Physics VIII/1*, Flugge S ed., Springer Verlag, Berlin, 1959, pp 125-263.
- [58] Simo JC, Hughes TJR. *Computational inelasticity*, Interdisciplinary Applied Mathematics Series, Springer Verlag, 1998.
- [59] Simo JC, Marsden, JE, Krishnaprasad PS. The hamiltonian structure of non-linear elasticity : the material and convective representations of solids, rods and plates, *Arch Rat Mech Anal*, 104, 1988, pp 125-183.
- [60] Soize C. *Dynamique des structures : Eléments de base et concepts fondamentaux*, Ellipses, Paris, 2001.
- [61] Suhubi ES. A generalized theory of simple thermomechanical materials, *Int J Eng Sci*, vol 20, 2, 1982, pp 365-371.
- [62] Taylor WR, Roland E, Ploeg H, Hertig D, Klabunde R, Warner MD, Hobatho MC, Rakotomanana L, Clift SE. Determination of orthotropic bone materials properties using finite Element Analysis and modal analysis, *J Biomechanics*, **35/6**, pp 767-773, 2002.
- [63] Timoshenko S. *Theory of plates and shells*, McGraw Hill, New-York, 1940.
- [64] Truesdell CA. *A first course in rational continuum mechanics. General concepts*, Academic Press, 1977.
- [65] Truesdell CA, editor. *Rational thermodynamics*, Springer Verlag, 2nd edition, 1984.
- [66] Truesdell CA, Noll W. *The nonlinear field theories of mechanics*, in *Encyclopedia of physics, III/3* ed. Flugge S, Springer Verlag, Berlin, 1965, 2nd edition, 1993.
- [67] Truesdell C, Toupin R. *The classical field theory*, in *Encyclopedia of Physics, vol VIII/1*, Flugge S, ed., Springer Verlag, 1960.
- [68] Vermeulen AH, Heppler GR. Predicting and avoiding shear locking in beam vibration problems using the B-spline field approximation method, *Comp Meth Applied Mech Engng*, 158, 1998, pp 311-327.
- [69] Wang CC, Truesdell C. *Introduction to rational elasticity*, Noordhoff International Publishing, Leyden 1973.
- [70] Ziegler H, Wehrli C, The derivation of constitutive relations from the free energy and the dissipation functions, in *Advances in Applied Mechanics*, vol 25, Wu TY, Hutchinson JW, editors, Academic press, New-York, 1987, pp 183-238.