UFR Mathématiques

Master Mathématiques
Première année
Année 2004-2005

Responsables:

Karim Bekka et Fabrice Mahé

INFORMATION

La réunion de présentation du Master Mathématiques Première année est organisée **le Mardi 7 Septembre 2004 à 14h : AMPHI Louis-Antoine, Bât. 2.**
pour plus d'informations voir le site:
http://perso.univ-rennes1.fr/fabrice.mahe/adm/master1/m1-index.html

INSCRIPTIONS, DÉLAIS

Les étudiants doivent avoir choisi les Unités d'Enseignement (U.E.) du premier semestre et transmis leur contrat pédagogique à un responsable au plus tard le 24 septembre 2004.

Les étudiants doivent avoir choisi les Unités d'Enseignement (U.E.) du second semestre et avoir ransmis leur contrat pédagogique à un responsable au plus tard le 21 janvier 2005.

CALENDRIER

L'année est organisée en deux semestres de 12 semaines de cours chacun.

Enseignements du premier semestre :
- 12 semaines de cours du jeudi 9 septembre au mercredi 8 décembre.
- Vacances de la Toussaint du samedi 30 octobre au mercredi 3 novembre.
- Vacances du jeudi 11 novembre au dimanche 14 novembre.
- Examens du lundi 13 au samedi 18 décembre plus éventuellement début janvier.
- Vacances de Noël du lundi 20 décembre au dimanche 2 janvier.

Inter-semestres : 2 semaines du lundi 3 au vendredi 14 janvier.
- Fin des examens.
- Travail d'Etude et de Recherche.
- Conférences, information sur les métiers: première ou deuxième semaine de janvier.
- Jury et inscription définitive aux modules du second semestre.
- Réunion d'information sur le second semestre.

Enseignements du second semestre :
- 12 semaines de cours du lundi 17 janvier au vendredi 15 avril.
- Vacances d'hiver du lundi 21 au dimanche 27 février.
- Vacances de Pâques du lundi 18 avril au dimanche 1er mai.
- Examens du lundi 2 mai au samedi 14 mai.
- Jury: semaine du lundi 30 mai au vendredi 3 juin.

OBJECTIF

La première année du Master mention Mathématiques permet, par le choix des options, une orientation progressive des étudiants vers une finalité recherche ou professionnelle et vers une spécialité.

En deuxième année, le Master propose 2 finalités et 6 spécialités:

Il y a 2 spécialités à **finalité professionnelle** : Modélisation et Analyse Numérique; Ingénierie Statistique.

Elles ont pour objectif de former des ingénieurs d'études, spécialisés dans la modélisation mathématique de phénomènes physiques, mécaniques, biologiques, financiers, dans l'analyse statistique de données complexes, ainsi que dans l'informatique scientifique. La formation répond au besoin dans les entreprises de cadres maîtrisant les outils mathématiques et informatiques nécessaires à la conception de modèles, à la simulation numérique et au développement de logiciels scientifiques. Elle permet donc à l'étudiant d'accéder aux carrières d'ingénieur mathématicien dans les entreprises technologiques et industrielles, les organismes nationaux d'étude ou de recherche, les banques et les compagnies d'assurance, les sociétés de service. Une bonne culture mathématique, associée à une bonne maîtrise de l'outil informatique garantit une adaptabilité aux évolutions futures de ces domaines d'application.

Il y a 4 spécialités à **finalité recherche**: Algèbre et Géométrie; Analyse et Applications; Probabilités et Modélisations Aléatoire; Statistiques.

Elles ont pour objectif de donner une formation de base en mathématiques (concepts fondamentaux et applications) pour la recherche et par la recherche. cette formation permet d'acquérir une culture de haut niveau en mathématiques avec un début de spécialisation (dans l'une des quatre spécialités offertes), afin de préparer ensuite dans d'excellentes conditions une thèse en mathématiques ou d'intégrer, comme ingénieur de recherche, des équipes et laboratoires spécialisées dans les applications des mathématiques.

Pour les étudiants qui le souhaitent, la première année permet l'obtention du diplôme de Maîtrise et d'acquérir les bases nécessaires à la préparation du concours de l'Agrégation. L'année de préparation au concours peut s'intercaller entre les deux années du Master.

CHOIX DES U.E.

Un cursus de Master première année est constitué de 9 U.E. de 6 ECTS chacune; celles de langue (3 ECTS) et TER (3 ECTS) sont obligatoires.

Les parcours proposés ici en fonction de la spécialité envisagée sont vonlontairement très souples. Des exemples de parcours sur deux années sont précisés sur le site internet. Il est aussi possible, avec l'accord d'un responsable de la formation, de prendre des enseignements dans une autre formation (pour un maximum de 18 ECTS sur l'année).

• Spécialité Modélisation et Analyse Numérique (finalité professionnelle): G10, 4 à 6 UE d'Analyse Numérique, les autres parmi Mécanique des milieux continus ou Mécanique des fluides en *Licence d'Ingénierie mécanique*, les UE Probabilités et Statistiques, G07, Physique quantique en *Licence de physique*, ...

• Spécialité Ingénierie Statistique : G10, 4 à 6 UE de Probabilités et Statistiques, G07, les autres parmi les UE d'Analyse Numérique.

• Spécialité Algèbre et Géométrie : 5 ou 6 UE d'Algèbre-Géométrie, les autres parmi les UE d'Analyse, d'Analyse Numérique, Probabilités et Statistiques.

• Spécialité Analyse et Applications : 5 ou 6 UE d'Analyse et Analyse Numérique, les autres parmi les UE d'Algèbre et Géométrie ou Probabilités et Statistiques.

• Spécialité Probabilités et Modélisation Aléatoire : 5 ou 6 UE parmi celles de Probabilités et Statistiques et Théorie du Signal, les autres parmi les UE d'Analyse, Analyse Numérique ou Algèbre et Géométrie.

• Spécialité Statistiques : 5 ou 6 UE parmi celles de Probabilités et Statistiques et Théorie du Signal, les autres parmi les UE d'Analyse, Analyse Numérique ou Algèbre et Géométrie.

U.E. conseillées pour l'Agrégation: G02, G03, G05 ou une des U.E suivantes:
- Pour l'option A, probabilité-statistiques: G12, H10, H11, H12.
- Pour l'option B, calcul scientifique: G08, G09, G10, H13.
- Pour l'option C, algèbre et calcul formel: H01, H04.

CONTRÔLE DES CONNAISSANCES

Le détail de la convention d'examen sera affiché au mois d'octobre. Les principales dispositions sont les suivantes. Les modalités de contrôle continu seront précisées en début de semestre dans chaque enseignement.

Un cursus de Master mathématiques première année est constitué de 9 U.E. semestrielles capitalisables de 6 ECTS, d'une U.E. de Langues de 3 ECTS et d'un T.E.R. (Travail d'Étude et de Recherche) comptant pour 3 ECTS.

Pour valider les 60 ECTS de la première année, l'étudiant doit obtenir la moyenne à l'ensemble des 11 U.E. Les étudiants conservent, pour les sessions suivantes, les U.E. dont les notes sont supérieures ou égales à 10 sur 20.

Lorsque la première année du Master est validée, il est possible de demander le diplôme national de maîtrise de mathématiques.

CAS DES ÉTUDIANTS SOCRATES

L'Université de Rennes 1 est intégrée à un réseau SOCRATES. Cela permet à des étudiants d'effectuer tout ou partie de leur scolarité dans une Université étrangère, tout en obtenant, grâce à des accords d'équivalence, le diplôme français. Les étudiants intéressés peuvent contacter le responsable: Félix Ulmer.

RÉPARTITION DES U.E.

Sigle	Dénomination des cours	CM	TD	TP
	Premier semestre, 12 semaines			
G01	Algèbre commutative	24h	24h	
G02	Géométrie différentielle	24h	24h	
G03	Groupes classiques	24h	24h	
G04	Théorie de Galois et représentations des groupes finis	24h	24h	
G05	Analyse fonctionnelle	24h	24h	
G06	Fonctions holomorphes d'une variable	24h	24h	
G07	Théorie du signal	24h	24h	12h
G08	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles	24h	24h	
G09	Modélisation de problèmes issus de l'industrie	24h	24h	12h
G10	Outils informatiques pour le calcul scientifique	24h	24h	
G11	Calcul scientifique pour l'analyse des données et recherche opérationelle	24h	24h	
G12	Probabilités de base	24h	24h	
MMC	Mécanique des milieux continus	24h	24h	12h
DIDA	Didactique des mathématiques	24h	24h	
	Langues en auto-formation		4h	
	Deuxième semestre, 12 semaines			
H01	Algèbre algorithmique	24h	24h	12h
H02	Analyse sur les variétés	24h	24h	
H03	Courbes Algébriques	24h	24h	
H04	Théorie algébrique des nombres	24h	24h	
H05	Topologie algébrique	24h	24h	
H06	Distributions	24h	24h	
H07	Fonctions spéciales.	24h	24h	
H08	Calcul scientifique en analyse numérique	24h	24h	
H09	Méthodes numériques pour les équations différentielles	24h	24h	
H10	Martingales à temps discret et chaînes de Markov	24h	24h	12h
H11	Modèles probabilistes et leur statistique	24h	24h	12h
H12	Statistique paramétrique	24h	24h	12h
H13	Méthodes numériques en optimisation	24h	24h	12h
Hist	Histoire et épistépomolgie des mathématiques	24h	24h	
MFL	Mécanique des fluides	24h	24h	12h
TER	Travail d'Etude et de Recherche			50h
	Langues		20h	

Programmes des unités d'enseignement

G01. Algèbre commutative - Responsable: A. Ducros

- Rappels sur les anneaux, les idéaux et les quotients. Idéaux premiers et maximaux, exemples géométriques (fonctions continues d'un compact vers $\mathbb{R}$. Intersection des idéaux premiers d'un anneau.
- Module sur un anneau, notions de base : sous-modules, module quotient, somme directe, produit, familles libres, génératrices, base, modules libres, rang.
- Suites exactes ; cohomologie de de Rham algébrique et holomorphe de la droite complexe privée de n points.
- Modules de type fini sur un anneau principal : le théorème de structure et des applications aux groupes abéliens de type fini et à l'algèbre linéaire (invariants de similitude, réduction de Jordan...). Point de vue matriciel : classes d'équivalence des matrices à coefficients dans un anneau principal, aspects théorique et algorithmique (si l'anneau est euclidien).
- Localisation : existence, propriété universelle, cas du localisé en un idéal premier. Notion d'anneau local, exemples géométriques (anneau des germes de fonctions holomorphes ou indéfiniment différentiables à l'origine). Etude (en cours ou en TD) des anneaux de valuation discrète.
- Anneaux noethériens : définition, théorème de Hilbert.
- Notion d'élément d'un anneau intègre entier sur un sous-anneau. Caractérisations équivalentes, fermeture intégrale, anneau intégralement clos. Cas particulier des éléments algébriques sur un corps et rappels sur les extensions de corps.

G02. Géométrie différentielle - Responsable: L. Meersseman

- Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, définition des variétés abstraites, variétés quotients (de nombreux exemples seront présentés).
- Applications différentiables entre variétés ; immersion, submersion, plongement.
- Etude affine et métrique des courbes et surfaces de $\mathbb{R}^3$.
- Propriétés métriques des surfaces : première et seconde formes fondamentales, théorème de Gauß, formule de Gauß-Bonnet.
- Etude des variétés réelles de dimension 2.

Livres de base:
M. Berger, B. Gostiaux. Variétés, courbes et surfaces. PUF, 1987.
M.P. do Carmo. Differential geometry of curves and surfaces. Prentice-Hall Inc., 1976.

G03. Groupes classiques - Responsable: D. Cerveau

- Définition des Grassmaniennes, étude des espaces projectifs (sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, un peu de corps finis). Géométrie projective : birapport, coniques.
- Les groupes $GL_n(K)$ et $PGL_n(K)$, leur action sur les espaces projectifs.
- Sous-groupes classiques de $GL_n(\mathbb{R})$: ce sont des sous-variétés, calcul de l'espace tangent à l'identité.
- Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$, étude du groupe orthogonal : aspects géométriques et algébriques.
- Groupes $O(p, q)$ et/ou le groupe symplectique.

G04. Théorie de Galois et représentations des groupes finis - Responsable: D. Ferrand

- Introduction : rappels sur la résolution des équations de degré 2, 3, et 4 et mention de ce qui se passe en degré 5. Corps de rupture, corps de décomposition, automorphismes d'extensions de corps. Extension normale, extension séparable. Caractérisations équivalentes des extensions finies galoisiennes et correspondance de Galois.
- Théorème de l'élément primitif. Exemple des extensions cyclotomiques et des extensions de Kummer. Théorie de Galois des corps finis. Un polynôme de groupe de Galois S_n pour $n \geq 5$ n'est pas résoluble par radicaux. Exemples en TD de tels polynômes. Etude du discriminant, en TD ou en devoir à la maison.
- Introduction aux représentations linéaires des groupes finis.

Livres de base:
J.-P. Escofier. Théorie de Galois. Cours avec exercices corrigés. Enseignement des Mathématiques. Masson, Paris, 1997
J.-P. Serre, Représentations linéaires des groupes finis. Hermann, Paris.

G05. Analyse fonctionnelle - Responsable: J. Camus

- Le théorème d'Hahn-Banach sous ses trois formes (géométrique, algébrique et topologique). Le théorème de Baire et ses corollaires dans les espaces de Banach : borne uniforme, application ouverte, graphe fermé, théorème de Banach-Steinhaus, supplémentaires topologiques. Topologie faible sur les espaces de Banach, théorème de Banach-Alaoglu, cas des espaces réflexifs.
  Rappels sur les espaces l^p, c_0, C_0^0, L^p, réflexivité.

- Spectre des opérateurs bornés. Cas des opérateurs de shift. Compacité : théorème d'Ascoli, propriétés des opérateurs compacts, opérateurs de Fredholm. Application à des intégrales de Volterra.

Livres de base:
H. Brézis, Analyse fonctionnelle. Paris, Masson, 1997.
F. Hirsh, G. Lacombe. Elements d'analyse fonctionnelle, Cours et Exercices. Masson, 1997.

G06. Fonctions holomorphes d'une variable - Responsable: M. Baker

- Sphère de Riemann, théorie de Cauchy, produit infini.
- Fonctions méromorphes, théorème de Mittag-Leffler.
- Théorème de Runge d'approximation par des fractions rationnelles.
- Famille normale, représentation conforme, Théorème de Koebe.
- Introduction à la géométrie hyperbolique complexe.
- Fonction P de Weierstraß, fonctions périodiques.
- Module d'un anneau.

Livres de base:
W. Rudin. Analyse réelle et complexe. Masson, 1975.
G. A. Jones, D. Singerman. Complex functions : analgebraic and geometric viewpoint. Cambridge University Press, 1987.

G07. Théorie du signal - Responsable: J.-F. Yao

- Convolution.
- Séries et transformée de Fourier.
- Transformée de Fourier discrète et algorithme FFT.

- Propriétés spectrales des signaux.
- Filtrage des signaux : utilisation de la transformée de Laplace pour les signaux à temps continu et de la transformée en z.

Livres de base:
C. Gasquet, P. Witomski. Analyse de Fourier et applications : filtrage, calcul numérique, ondelettes. Masson 1990.

G08. Analyse numérique des équations aux dérivées partielles - Responsable: M. Crouzeix

- Rappels et compléments sur les espaces de Hilbert.
  - Problèmes variationnels quadratiques (minimisation d'une fonctionnelle quadratique).
  - Théorème de Lax-Milgram.
  - Discrétisation par la méthode de Galerkin. Lemme de Céa.
- Langage des distributions.
  - Espaces de Sobolev.
  - Théorèmes de trace.
  - Formulation variationnelle de problèmes elliptiques d'ordre 2.
- Exemples :
  - Méthodes des différences finies et des éléments finis en dimension 1
  - Problème de Dirichlet et de Neuman, en dimension 2
  - Initiation à la méthode des éléments finis P1
  - Applications à l'élasticité et à la dynamique des fluides.

Livres de base:
- Analyse Fonctionnelle, Brézis, Paris, Masson, 1992.
- Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, P.A. Raviart, J.M. Thomas, Paris, Masson, 1988.

G09. Modélisation de problèmes issus de l'industrie - Responsable: D. Martin et F. Mahé
Plusieurs thèmes seront traités. Par exemple:
- Systèmes chimiques de réaction.
- Modélisation de la qualité de l'air.
- Analyse des signaux en imagerie.
- Optimisation de formes.

Livres de base:
A. Friedman, W. Littman, Industrial Mathematics, SIAM 1994.

G10. Outils informatiques pour le calcul scientifique - Responsable: Y. Lafranche et F. Mahé

- Généralités sur les ordinateurs
- Codage de l'information
- Arithmétique des ordinateurs
- Langages de programmation
- Algorithmique. Structuration des données
- Développement des logiciels

Cet enseignement donnera lieu à la mise en œuvre d'un ou plusieurs algorithmes dans le cadre d'un projet réalisé à l'aide d'un ordinateur.

G11. Calcul scientifique pour l'analyse des données et recherche opérationelle - Responsable: J.-F. Yao

- Analyses factorielles de données. T. P. en Sas.
- Recherche opérationnelle

G12. Probabilités de base - Responsable: H. Hennion

- Rappels sur les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$:
  - Tribu engendrée, exemples de lois, fonction de répartition.
  - Intégration, espérance, théorème de transfert, moments, inégalités classiques, théorèmes de convergence.
- Identification de deux probabilités : point de vue ensembliste : π-systèmes, théorème de Dynkin (admis) ; point de vue fonctionnel.
- Fonction caractéristique : lien avec les moments ; caractérisation d'une loi par sa fonction caractéristique ; cas d'une loi à densité.
- Indépendance :
  - Rappels: évènements indépendants, variables indépendantes ; tribu produit, loi produit, théorème de Fubini, caractérisation de l'indépendance par la loi produit ; indépendance et espérance, sommes de variables indépendantes.
  - Caractérisation de l'indépendance par les fonctions caractéristiques.
  - Vecteurs gaussiens.

n-échantillon, loi multinomiale, statistique d'ordre.
- Suites de tribus ou de variables indépendantes : tribu asymptotique, loi 0-1 (on admettra l'existence d'une suite de variables aléatoires indépendantes).

- Convergence :
  - Différentes notions de convergence : Convergence presque sre, dans L^p, en probabilité, en loi.
  - Critères de convergence en loi, énoncé du théorème de Paul Lévy.

- Sommes de variables aléatoires indépendantes. :
  - Rappel : loi faible des grands nombres; - Loi forte des grands nombres. Inégalités maximales, convergence des séries aléatoires.
  - Fréquence et probabilité, convergence de la probabilité empirique.
  - Théorème central limite dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$. Théorème du χ^2.
  - Applications : méthodes de Monte-Carlo, intervalle de confiance.

Livres de base:
D. Revuz : Probabilités. Collection Méthodes, Hermann, 1997.
R. Durrett : Probability : Theory and examples. Duxbury Press, 2ème éd. 1991.

H01. Algèbre algorithmique - Responsable: J.-C. Raoult et M.-F. Coste-Roy

- Mesures de complexité : Récurrences, séries génératrices. valuations asymptotiques.

- Arithmétique et algèbre linéaire :
  Les entiers : systèmes de numération, addition et multiplication naïves, multiplications plus efficaces.
  Les matrices : addition et multiplication naïves, multiplications plus efficaces. Calcul de déterminants. Algorithmes de réduction d'une matrice. Réduction d'une forme quadratique.

- Polynômes :
  Addition et multiplication, naïves et efficaces.
  Division, PGCD. Résultants, sous-résultants. Suites de Sturm. Transformée de Fourier rapide (FFT) ; produit d'entiers et de polynômes. Factorisation de polynômes dans $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})[X]$ et dans $\mathbb{Z}[X]$, algorithme de Berlekamp. Bases de Gröbner ; résolution de systèmes d'équations algébriques.

Livres de base:
D. Cox, J. Little, D. O'shea : Ideals, varieties, and algorithms, an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Springer, 1997.
M. Mignotte : Mathématiques pour le calcul formel. PUF, 1989.

H02. Analyse sur les variétés - Responsable: K. Bekka

- Variétés, applications entre variétés.
- Espace tangent, champ de vecteurs, métrique riemannienne. Distance associée à une métrique riemannienne.
- Formes différentielles, dérivations, formules de Stokes.
- Flot associé à un champ de vecteurs, flot complet.
- Flot géodésique et théorème de Hopf-Rinow.

Livres de base:
M. Berger, B. Gostiaux. Variétés, courbes et surfaces. PUF., 1987.
B. Doubrovine, A. Formenko, S. Novikov. Géométrie contemporaine. MIR, 1982.

H03. Courbes Algébriques - Responsable: L. Moret-Bailly

- Ensembles algébriques affines, idéal d'un ensemble algébrique affine.
- Topologie de Zariski. Composantes irréductibles d'un ensemble algébrique.
- Fonctions régulières et applications régulières entre ensembles algébriques affines.
- Corps des fonctions rationnelles sur un ensemble algébrique irréductible, pôles et domaine de définition. Anneau local en un point.
- Propriétés locales des courbes planes : points singuliers et réguliers, multiplicité d'un point singulier, tangentes en un point.
- Multiplicité d'intersection de deux courbes planes en un point.
- Ensembles algébriques projectifs. Homogénéisation d'un idéal. Fermeture projective d'un ensemble algébrique affine. Cas des courbes planes.
- Théorème de Bézout. Théorème de Noether. Applications aux cubiques planes.

Livres de base:
W. Fulton, Algebraic Curves, Addison-Wesley (1989)

H04. Théorie algébrique des nombres - Responsable: P. Autissier

- Problème de Fermat en degrés 2, 3 et 4.
- Théorème des deux carrés.
- Compléments sur les extensions algébriques : norme, trace, discriminant.

- Anneaux d'entiers des corps de nombres, anneaux de Dedekind.
- Groupe des unités, groupe des classes d'idéaux.
- Équation de Pell.
- Loi de réciprocité quadratique.

Livres de base:
P. Samuel. Théorie algébrique des nombres. Hermann, 1967.

H05. Topologie algébrique - Responsable: A. Zorich

- Topologie générale : connexité, connexité locale par arcs, topologie quotient.
- Groupe fondamental d'un espace topologique ; le cercle et les sphères. Applications aux fonctions holomorphes et théorème des résidus sur la sphère.
- Produit libre et produit amalgamé ; le théorème de Van Kampen ; groupe fondamental des surfaces.
- Revêtement topologique et théorie de Galois des revêtements.
- Compléments de topologie différentielle et/ou combinatoire.

Livres de base:
A. Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press.
C. Godbillon. Topologie algébrique. Hermann, 1971.

H06. Distributions - Responsable: C. Cheverry

- Rappels : la convolution dans L^1, les formules de Leibnitz, de Taylor avec reste intégral et de Stokes.
- Fonctions test et partition de l'unité. Définition des distributions. Opérations sur les distributions. Convergence des distributions. Plongement de L^1_{loc} dans les distributions.
- Exemples de distributions : dérivées de Delta, distributions homogènes, valeurs au bord de fonctions holomorphes.
- Distributions à support compact, produit tensoriel et convolution. Notion de solution élémentaire d'une EDP à coefficients constants.
- Distributions tempérées et transformée de Fourier.

- Calcul de solution élémentaire : $\mathcal{D}'$
- Laplacien, équation de la chaleur, équation des ondes en dimension 1 et 3.

Livres de base:
J. M. Bony. Cours d'analyse : théorie des distributions et analyse de Fourier. Librairie Evrolles, 2001.
L. Scharwtz. Méthodes mathématiques pour les sciences physiques. Hermann, 1965.

H07. Fonctions spéciales - Responsable: N. Lerner

- Rappels sur les fonctions méromorphes et les produits infinis.
- Méthodes asymptotiques en dimension 1 : méthodes de Laplace, de la phase stationnaire, du col.
- Fonctions Gamma, Beta et factorielle.
- Quelques propriétés de la fonction Zeta de Riemann.
- Fonction hypergéométrique.
- Fonctions de Bessel, d'Airy.
- Polynômes classiques.

Livres de base:
W. Rudin. Analyse réelle et complexe. Masson, 1996.
J. Dieudonné. Calcul infinitésimal. Hermann, 1980.

H08. Calcul scientifique en analyse numérique - Responsable: É. Darrigrand

- Analyse et construction complètes d'un programme d'éléments finis pour la discrétisation d'un problème aux limites bidimensionnel.
- Choix de la formulation variationnelle et de l'élément fini. Eléments P1, P2, Q1, Q2.
- Utilisation du code de recherche Mélina :
  - Maillage et numérotation.
  - Calculs élémentaires : matrices de masse et de rigidité.
  - Assemblage des matrices creuses.
  - Conditions aux limites essentielles.
  - Résolution de systèmes linéaires à matrice creuse.
  - Construction d'un programme principal en Fortran et d'un fichier de directives

pour piloter Mélina.
- Affichage graphique des résultats.

Livres de base:
- Documentation HTML du code Mélina :
http://perso.univ-rennes1.fr/ daniel.martin/melina/www/homepage.html

H09. Méthodes numériques pour les équations différentielles - Responsable: D. Martin
Objectif: Avoir les connaissances nécessaires pour résoudre numériquement différents types d'équations différentielles.

- Méthodes multi-pas pour les Équations Différentielles Ordinaires.
- Analyse des méthodes de discrétisation des problèmes variationnels elliptiques. Erreur de discrétisation, d'interpolation, de consistance.
- Compléments sur les méthodes d'éléments finis (éventuellement volumes finis) appliquées aux EDP: espaces d'éléments finis, interpolation, intégration numérique, éléments finis isoparamétriques.
- Formulation variationnelle des problèmes paraboliques. Discrétisation en temps et en espace.

Livres de base:
M. Crouzeix, A. Mignot, Analyse numérique des équations différentielles, Masson, Paris, 1989.
P. A. Raviart, J. M. Thomas. Introduction à l'analyse numérique des EDP. Masson, 1988.
C. Johnson, Numerical Solution of Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 1987.

H10. Martingales à temps discret et chaînes de Markov - Responsable: A. Raugi
Espérance conditionnelle : cas d'une variable aléatoire réelle de carré intégrable; extension à une variable aléatoire réelle quasi-intégrable.

- Généralités sur les processus à temps discret : filtrations ; temps d'arrêt ; tribu antérieure à un temps d'arrêt.
- Martingales et surmartingales.
  - Généralités et exemples.
  - Théorème d'arrêt de Doob ; inégalités maximales.
  - Théorème de convergence presque-sûre ; théorème de Doob.
  - Applications : loi 0-1 de Kolmogorov ; lois des grands nombres pour les accroissements de martingale.

- Chaînes de Markov à espace d'états dénombrable :
  - Généralités et exemples.
  - Classification des états.
  - Récurrence, transience.
  - Théorème ergodique pour les chaînes récurrentes irréductibles ; récurrence nulle et récurrence positive.

Livres de base:
D Williams, Probability with martingales, Cambridge University Press, Cambridge, 1991. (chapitres 9–14).
J. R. Norris, Markov chains. Cambridge University Press, 1998..
D. Foata, A. Fuchs. Processus stochastiques, processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales. Cours et exercices. Dunod, 2002.

H11. Modèles probabilistes et leur statistique - Responsable: J.-F. Yao

- Convergence des paramètres empiriques :
  Transformations du TLC, statistiques additives. Convergence des moments empiriques (LGN, TLC, centrage). Application : méthode des moments. Exemples d'intervalles de confiance (IC). Statistiques d'ordre, espacements, rangs. Convergence des quantiles empiriques (LGN, TLC, IC). Cas de la médiane. Convergence des extrêmes (types, exemples, IC).

- Convergence de la mesure empirique :
  Fonction de répartition et fonction quantile, transformations. Théorème de Glivenko-Cantelli. Théorème de Kolmogorov-Smirnov. Premières notions sur les tests : hypothèse, niveau, puissance. Test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov. Application : tests d'exponentialité.

- Tests du chi-deux :
  Loi multinomiale et loi du chi-deux. TLC multivarié. Test d'adéquation à une loi discrète. Test d'adéquation à une famille de lois. Test d'indépendance de deux variables discrètes.

- Corrélation entre deux variables L^2 :
  Covariance empirique et interprétation (géométrie de L^2). Convergence du coefficient de corrélation (LGN, TLC, IC). Cas gaussien. Application : test de corrélation. Régression simple.

- Chaînes de Markov à espace d'états fini :
  Transitions, classification des états, transience, récurrence. Théorèmes de convergence (LGN, TLC). Applications : estimation, IC et test d'une probabilité de transition ; test du chi-deux pour une matrice de transition.

- Processus de Poisson et applications :
  Processus de Poisson à sauts constants : propriétés, représentations. Théorèmes de convergence (LGN, TLC). Applications : estimation, IC et test du paramètre d'intensité ; lien avec les chapitres 1 et 3 (espacements) ; file d'attente M/M/1, convergence à l'équilibre, étude statistique.

- Travaux pratiques sous Scilab :
  Génération d'échantillons, simulations de théorèmes limites, mise en oeuvre de modèles (Markov, Poisson, files).

Livres de base:
G. Sapporta. Probabilités, analyse de données, statistique. Editions Technip, 1990
D. Fourdrinier, Statistique inférentielle. Dunod, 2002

H12. Statistique paramétrique - Responsable: Ph. Berthet
Dans un modèle probabiliste incomplètement spécifié on observe une suite de variables aléatoires. Il s'agit de localiser un paramètre inconnu de la loi de ces variables en se basant uniquement sur leur observation. Une approche générale est développée, donnant lieu à des méthodes systématiques parfois optimales et permettant de comparer les décisions à distance finie ou asymptotiquement. Chaque notion, chaque théorème sera illustré par un exemple simple.

- Modèle paramétrique. (4h) Motivation : détection d'un signal bruité.
  - Domination d'une classe de mesures, mélanges.
  - Vraisemblance des paramètres.
  - Décision, risque, biais, comparaisons.

- Information sur le paramètre. (8h) Motivation : contrôle de qualité (paramètres d'une gaussienne).
  - Information qualitative : exhaustivité, minimalité.
  - Information quantitative de Fisher, contrastes.
  - Borne inférieure d'efficacité.
  - Modèle exponentiel, théorème de Koopman.

- Estimation du paramètre. (6h) Motivation : approfondir les techniques abordées au chapitre 1.
  - Régions de confiance, construction.
  - Convergence du maximum de vraisemblance.
  - Réduction de la variance et du biais.

- Tests d'hypothèses.(6h) Motivation : reconnaissance d'un signal, dépistage.
  - Risques, puissance, comparaison, cas gaussien.
  - Tests d'hypothèses simples, théorème de Neyman-Pearson.
  - Rapport de vraisemblance monotone, tests UPP.
  - Tests bilatères, généralisations.

- Travaux pratiques sous Scilab :
  - génération d'échantillons, simulations d'estimateurs et de tests, illustration des convergences, estimation des erreurs et des risques.

Livres de base:
D. Foudrinier. Statistique inférentielle. Dunod, 2002.
A. Monfort. Cours de statistique Mathématique. Economica, 1997.
P. Tassi. Méthodes statistiques. Economica, 1989.

H13. Méthodes numériques en optimisation - Responsable: É. Darrigrand

- Outils utiles à la mise en place des méthodes d'optimisation : calcul différentiel dans les espaces de Hilbert (gradient - Hessien) ; introduction à la topologie faible (convergence faible) ; convexité d'une fonctionnelle définie sur un espace de Hilbert.

- Définition d'un problème d'optimisation. Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

- Algorithmes de calcul :
  - Méthode du simplexe.
  - Méthodes du gradient optimal, du gradient à pas constant, du gradient conjugué (cas sans contrainte).
  - Méthode de la plus grande pente, multiplicateurs de Lagrange (cas avec contraintes).
  - Relations de Kuhn-Tucker, dualité, algorithme d'Uzawa (programmation non linéaire).

- Applications : contrôle optimal d'équations aux dérivées partielles, problème inverse, optimisation de forme, commande optimale.

Livres de base:
P.G. Ciarlet. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Masson, 1998.
J. Céa. Optimisation, théorie et algorithmes. Dunod, 1971.
J. B. Hiriart-Urruty. L'optimisation. Que sais-je ? P.U.F. 1996.

Hist. Histoire et épistépomolgie des mathématiques - Responsable: J.-P. Escofier et A. Herreman Le cours d'histoire et d'épistémologie des mathématiques sera divisée en deux parties complémentaires.
1) Un cours (Jean-Pierre Escofier) retraçant l'histoire de la résolution des équations algébriques : la résolution de l'équation du second degré par les babyloniens, les travaux arabes (al Khwarizmi, Omar Khayyam, al Tusi), la résolution de l'équation du troisième

degré et la découverte des nombres complexes (Cardan, Bombelli), les résolvantes de Lagrange, Vandermonde et les équations cyclotomiques, les travaux d'Abel sur l'équation du cinquiéme degré, les travaux de Galois et la naissance de la théorie des groupes, et plus si le temps le permet.
2) Un cours (Alain Herreman) consacré à l'étude historique de quelques théorèmes, parmi lesquels le théorème de complétude de Gödel et le théorème de Löwenheim-Skolem. Leurs énoncés et leurs démonstrations seront d'abord exposés sous leur forme actuelle. Nous les étudierons ensuite dans les articles dans lesquels ils ont été introduits pour la première fois en les situant dans leur contexte d'origine : les mathématiques du premier tiers du 20e siècle, moment crucial dans le développement des mathématiques actuelles. La comparaison des énoncés dans les articles originaux et dans leur exposé actuel mettra à jour les transformations qu'ils ont subies au cours de leur histoire. Nous verrons alors dans quelle mesure ces transformations sont générales et concernent l'ensemble de l'histoire des mathématiques et partant la nature mêéme des mathématiques.
Livres de base:
J.-P. Escofier, Théorie de Galois. Cours avec exercices corrigés. Enseignement des Mathématiques. Masson, Paris, 1997.

DIDA. Didactique des mathématiques
- Responsable: J. Julo, J.-P. Escofier et M.-P. Lebaud
Le module comporte 3 cours de 8 heures, associés chacun à 6 heures de TD, un stage en classe de 12 heures et un TD de 6h consacré à l'encadrement du stage.

- Cours 1 (Jean Julo) : Psychologie et didactique de la résolution de problèmes.

  Le premier objectif de ce cours est d'apporter aux étudiants un certain nombre de résultats et de notions utiles pour comprendre les processus cognitifs qui sont à la base de l'activité de résolution de problèmes. Cet apport théorique s'appuie sur de nombreux exemples. Il est construit autour de deux notions principales : celle de représentation du problème et celle de schéma de problèmes.

  Le second objectif du cours est de présenter quelques recherches portant sur les aspects didactiques de la résolution de problèmes dans le cadre d'un enseignement de mathématiques. Les deux questions principales auxquelles cet examen de travaux récents permettra de répondre sont les suivantes : quelle différence existe-t-il entre apprendre à résoudre et aider à résoudre des problèmes ? Comment prendre en compte les résultats de ces travaux dans l'apprentissage des mathématiques ?

- Cours 2 : (Marie-Pierre Lebaud) : Analyse et apprentissage de la démonstration en mathématiques.

  Ce cours a pour but de donner des moyens à de futurs enseignants d'analyser et de comprendre les processus qui interviennent dans la conception et l'écriture d'un texte de démonstration. Après avoir analysé les structures d'une démonstration, on en étudie les difficultés : difficultés structurelles, difficultés du langage utilisé, à l'aide de textes issus soit de manuels, soit de copies d'élèves. Une méthode d'analyse de copies est proposée qui peut permettre de comprendre certaines difficultés et faire progresser les élèves. Des activités, élaborées par des groupes de recherche IREM, sont présentées.

- Cours 3 (Jean-Pierre Escofier) : Rôle des mathématiques dans la société actuelle à partir de quelques exemples : météorologie, informatique, cryptologie, médecine, analyse des données, etc. et de quelques histoires sur des mathématiciens récents.

- Stage d'observation en classe. Le volume du stage est de 12 heures de présence dans une classe (école, collège ou lycée), plus 6 heures de TD d'accompagnement. Le stage est validé par un rapport. Le stage a deux objectifs principaux :

  - aider l'étudiant à affiner son projet professionnel en lui permettant d'approcher au plus près la réalité du métier d'enseignant ;

  - l'amener à acquérir des compétences qui lui seront utiles lors de sa formation professionnelle à l'UFM, en particulier : apprendre à observer et analyser les processus d'apprentissage et d'enseignement propres aux mathématiques.

Livres de base:
Cours 1 : Jean Julo : Représentation des pb et réussite en maths, PUR, 1995.
Cours 2 : Jean Houdebine et coll. : La démonstration : écrire des mathématiques au collège et au lycée, Hachette, 1998.
Cours 3 : Textes sur les mathématiques des revues scientifiques (Pour la Science, etc.).

MMC. Mécanique des milieux continus - Responsable: L. Rakotomanana
Objectif: Notions de milieux déformables et les efforts internes.Théorie de lélasticité.

- Eléments de calcul tensoriel: Transposé, Produit tensoriel, Produit scalaire, Décomposition spectrale, Dérivées de fonctions tensorielles (Gradient, Divergence, Rotationel, Laplacien).

- Déformation: Hypothèses de continuité, Transformations - Déformations, Déformations principales, Déformation moyenne, Compatibilité de la déformation.

- Contrainte: Calcul intégral, Théorème de la divergence, Conservation de la masse, équation de continuité, Equations dynamiques, Théorème de Cauchy, Contraintes principales.

- Milieux continus élastiques: Critères de résistance des matériaux, Conservation de l'énergie, comportement élastique, Milieux élastiques linéaires.

- Equations de Navier: Equations locales de l'élasticité linéaire, équations locales de liaisons, Elasticité plane.

- Problèmes anti-plans : Classification, Traction/Compression, Torsion pure, Flexion pure, effort tranchant.

Livres de base:
An introduction to continuum mechanics, M Gurtin, Academic press 1981.
Cours de mécanique des milieux continus. J Mandel, Gabay, 1994.

MFL. Mécanique des fluides - Responsable: N. Rittemard
Pré-requis: MMC - Mécanique des milieux continus
Objectif: Donner les bases de la mécanique des fluides et les lois de conservation. Appréhender les notions : vitesse, pression, fonction de courant, potentiel des vitesses, tourbillon et vorticité. Mécanique des fluides pour l'ingénieur : Théorème d'Euler et conservation du débit. Analyse dimensionnelle et similitude : théorie des modèles et des maquettes.

- Modèle continu de fluide: Hypothèse du continu, Fluide (définition et propriétés), Modélisation des efforts.
- Cinématique: Description lagrangienne et eulérienne, Dérivée particulaire, Trajectoire, ligne de courant, Analyse du mouvement relatif autour d'un point, Volumes matériel et de contrôle, Dérivée particulaire d'une intégrale.
- Conservation de la masse: Equation de conservation de la masse et continuité, Vecteur potentiel, Fonction de courant d'un écoulement 2D, Débit, potentiel des vitesses, Circulation, Exemples (Portance d'une aile d'avion; Maelstrom, tornade...).
- Conservation de la quantité de mouvement : Equation de conservation de la quantité de mouvement, Fluide newtonien (équation de Navier-Stokes, Navier et Euler), Bernoulli dans les cas simples, Conditions aux limites, Exemples (écoulements de Poiseuille et de Couette...).
- Conservation de l'énergie: Formes énergie interne et enthalpique, Forme entropique, Système complet des équations de conservation, Ecoulement isentropique, Conditions d'incompressibilité, Théorème d'Euler et Conservation du débit, Exemples (efforts sur une conduite, effet Venturi...).
- Analyse dimensionnelle et similitude: Types de grandeurs physiques dimensionnelles, Théorème de Vaschy - Buckingham, Similitudes de Reynolds, de Froude; Modèle de Prandtl...

Livres de base:
Mécanique des fluides. D desjardins, M Coumbarnous, N Bonneton, Dunod 2002.