
L2 : Outils mathématiques 4

Feuille de TD n°7

les corrigés de certains exercices qui n'ont pas été traités en td

1. Surfaces paramétrées

Exercice 1.1. Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = (x, y, -z)$ à travers la demi-sphère

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 1.2. Sans calcul, déterminer le flux du vecteur $\vec{i}$ à travers la surface limitée par le plan $x + y + z = 1$,
 $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$.

Exercice 1.3. Calculer le flux à travers la surface limitée par l'ellipse d'équations
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

(avec $a > 0$ et $b > 0$)

- 1) du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{V}(x, y, z) = (1, 2, 3)$
- 2) du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{W}(x, y, z) = (z, y, x^2)$.

Exercice 1.4. Vérifier la formule de Stokes lorsque S est la demi-sphère supérieure centrée en 0 et de rayon 1 et C son bord, pour les champs de vecteurs

- 1) $\vec{V}(x, y, z) = (x, y, z)$
- 2) $\vec{W}(x, y, z) = (y, z, x)$.

Exercice 1.5. Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ le long de l'ellipse $\mathcal{E}$ (après avoir préciser le sens du parcours) d'équations
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

1. Directement. 2. En utilisant la formule de Stokes

Solution:

L'ellipse $\mathcal{E}$ est obtenue comme intersection du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$ avec le plan d'équation $z = 1 - x$.

On a $x + z = 1$, d'où $z = x - 1$, et les En utilisant les coordonnées cylindriques on obtient une paramétrisation

de l'ellipse $\mathcal{E}$:
$$\begin{cases} x(\theta) = \cos \theta \\ y(\theta) = \sin \theta \\ z(\theta) = 1 - x(\theta) = 1 - \cos \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

1. La circulation du champ $\vec{V}$ le long de la courbe $\mathcal{E}$ est égale à :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} \vec{V} &= \int_0^{2\pi} \vec{V}(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) \cdot \begin{pmatrix} x'(\theta) \\ y'(\theta) \\ z'(\theta) \end{pmatrix} d\theta = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin \theta - (1 - \cos \theta) \\ (1 - \cos \theta) - \cos \theta \\ \cos \theta - \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} ((-\sin^2 \theta + \sin \theta + \sin \theta \cos \theta) + (\cos \theta - 2 \cos^2 \theta) + (\sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta)) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \sin \theta + \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= [-2\theta - \cos \theta + \sin \theta + \sin^2 \theta]_0^{2\pi} = \boxed{-4\pi} \end{aligned}$$

2. La surface S de bord l'ellipse $\partial S = \mathcal{E}$ est l'ellipse pleine de paramétrisation

$$S = \{s(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1 - r \cos \theta) \mid r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

$$\text{On a } \vec{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\frac{\partial s}{\partial r} \wedge \frac{\partial s}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où } flux(\vec{\text{rot}} \vec{V}, S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \vec{\text{rot}} \vec{V}(s(r, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial r} \wedge \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -4r dr d\theta = -4\pi.$$

Finalement la formule de Stokes nous donne : $Circulation(\vec{V}, \partial S) = flux(\vec{\text{rot}} \vec{V}, S) = \boxed{-4\pi}$
on retrouve ainsi le résultat de 1.

Exercice 1.6. On considère l'intégrale $\int_C (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz$, où C est le cercle d'équations $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ Calculer cette intégrale en appliquant la formule de Stokes.

Retrouver le résultat à l'aide d'un calcul direct.

Solution:

- On a d'une part $\int_C (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz = circulation(\vec{V}, C)$ où $\vec{V} = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$. et d'autre part $\vec{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Comme $\partial S = C$, la formule de Stokes nous donne :

$$\int_C (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz = Circulation(\vec{V}, C) = flux(\vec{\text{rot}} \vec{V}, S) = \boxed{0}.$$

- La forme $\omega = (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz$ est exacte, car elle est définie sur $\mathbb{R}^3$ qui est étoilé et $\frac{\partial(y+z)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial(z+x)}{\partial x}$, $\frac{\partial(z+x)}{\partial z} = 1 = \frac{\partial(x+y)}{\partial y}$ et $\frac{\partial(y+z)}{\partial z} = 1 = \frac{\partial(x+y)}{\partial x}$ d'où $\int_C (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz = \boxed{0}$, on retrouve ainsi le résultat en 1.

Remarque : On peut aussi montrer que $\omega = df$ où $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ et obtenir que

$$\int_C (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz = \boxed{0}, \text{ puisque } C \text{ est une courbe fermée.}$$

Exercice 1.7. Soit Σ la partie de la surface décrite par le paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ et $z \geq 0$.

- Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F} = 3x\vec{i} + 3y\vec{j} + z\vec{k}$ à travers Σ .
- On note L la trace de Σ sur le plan xOy (il s'agit d'un cercle dont on calculera l'équation). Vérifier le théorème de Stokes pour le champ vectoriel $\vec{F} = 3z\vec{i} + 4x\vec{j} + 2y\vec{k}$, i.e. l'égalité

$$Flux(\vec{\text{rot}} \vec{F}, \Sigma) = Travail(\vec{F}, L).$$

Solution:

- On a $\Sigma = \{(x, y, z) \mid z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$ en utilisant les coordonnées polaires en (x, y) , on obtient $\Sigma = \{s(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 9 - r^2) \mid \theta \in [-\pi, \pi], r \in [0, 3]\}$. On a $\frac{\partial s}{\partial r} \wedge \frac{\partial s}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -2r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r^2 \cos \theta \\ 2r^2 \sin \theta \\ r \end{pmatrix}$ d'où

$$flux(\vec{F}, \Sigma) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^3 \vec{F}(s(r, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial r} \wedge \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^3 \begin{pmatrix} 3r \cos \theta \\ 3r \sin \theta \\ 9 - r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2r^2 \cos \theta \\ 2r^2 \sin \theta \\ r \end{pmatrix} dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^3 (6r^3 \cos^2 \theta + 6r^3 \sin^2 \theta + 9r - r^3) dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^3 (5r^3 + 9r) dr d\theta = 2\pi \frac{7 \times 3^4}{4} = \boxed{\frac{567\pi}{2}}.$$

- $L = \Sigma \cap (xoy) = \{(x, y, z) \in \Sigma \mid z = 0\} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 9, z = 0\} = \{(3 \cos \theta, 3 \sin \theta, 0) \mid \theta \in [-\pi, \pi]\}$

$$\text{Alors } \text{circulation}(\vec{F}, L) = \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \cos \theta \\ 6 \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \sin \theta \\ 3 \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta = 36 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = \boxed{36\pi}.$$

$$\text{D'autre part } \vec{\text{rot}} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3z \\ 4x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} \text{flux}(\vec{\text{rot}} \vec{F}, \Sigma) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^3 \vec{\text{rot}} \vec{F}(s(r, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial r} \wedge \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2r^2 \cos \theta \\ 2r^2 \sin \theta \\ r \end{pmatrix} dr d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^3 (4r^2 \cos \theta + 6r^2 \sin \theta + 4r) dr d\theta = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^3 dr d\theta = \boxed{36\pi}. \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \iint_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \text{flux}(\vec{\text{rot}} \vec{F}, \Sigma) = 36\pi.$$

Exercice 1.8. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers la surface S en utilisant la formule d'Ostrogradski :

- 1) $\vec{V}(x, y, z) = (x^2y, -x^2z, z^2y)$, S le bord du parallélépipède rectangle formé par les plans : $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ et $z = 1$.
- 2) $\vec{V}(x, y, z) = (xz, yz, -z^2)$, S l'ellipsoïde d'équation $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.

Exercice 1.9. Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ à travers la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$: 1) Directement 2) A l'aide de la formule d'Ostrogradski.

Solution: On note par S_R la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et par B_R la boule définie par l'inéquation $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

1. On utilise les coordonnées sphériques pour obtenir une paramétrisation de la sphère S_R

$$S_R = \left\{ s(\theta, \phi) = (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, R \sin \phi) \mid \theta \in [-\pi, \pi], \phi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}.$$

On a

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial s}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \cos \phi \\ R \cos \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R \cos \theta \sin \phi \\ -R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 \cos \theta \cos^2 \phi \\ R^2 \sin \theta \cos^2 \phi \\ R^2 \cos \phi \sin \phi \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{flux}(\vec{V}, S_R) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{V}(s(\theta, \phi)) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial s}{\partial \phi} \right) d\phi d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi \\ R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\ R^2 \sin^2 \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R^2 \cos \theta \cos^2 \phi \\ R^2 \sin \theta \cos^2 \phi \\ R^2 \cos \phi \sin \phi \end{pmatrix} d\phi d\theta \\ &= R^4 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 \theta \cos^4 \phi + \sin^3 \theta \cos^4 \phi + \sin^3 \phi \cos \phi) d\phi d\theta \\ &= R^4 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ((\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) \cos^4 \phi + \sin^3 \phi \cos \phi) d\phi d\theta. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 \theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta - \cos \theta \sin^2 \theta) d\theta = \left[\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0 \text{ et } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \phi \cos \phi d\phi = 0 \text{ car les fonctions intégrées sont impaires.}$$

$$\text{Finalement, } \text{flux}(\vec{V}, S_R) = R^4 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ((\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) \cos^4 \phi + \sin^3 \phi \cos \phi) d\phi d\theta = \boxed{0}$$

2. La formule d'Ostrogradski donne $\text{flux}(\vec{V}, S_R) = \iiint_{B_R} \text{div}(\vec{V}) dx dy dz$;

comme $\text{div}(\vec{V})(x, y, z) = 2x + 2y + 2z$, est impaire $\text{div}(\vec{V})(-x, -y, -z) = -\text{div}(\vec{V})(x, y, z)$ et que B_R est symétrique par rapport à l'origine $(0, 0, 0)$, l'intégrale $\iiint_{B_R} \text{div}(\vec{V}) dx dy dz = 0$

$$\text{D'où, } \text{flux}(\vec{V}, S_R) = \iiint_{B_R} \text{div}(\vec{V}) dx dy dz = \boxed{0}, \text{ on retrouve ainsi le résultat de 1.}$$

Exercice 1.10. On considère la boîte cylindrique S composée du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq b$ ($a > 0$ et $b > 0$) et des deux disques de rayon a aux niveaux $z = 0$ et $z = b$.

On définit le champ de vecteurs $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$ par $\vec{v}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

1. Calculer directement le flux de $\vec{v}$ à travers S .
2. Calculer le flux de $\vec{v}$ à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradski.

Solution:

1. a) Notons $S_0 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = a^2, 0 < z < b\} = \{s(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z) \mid \theta \in [-\pi, \pi], 0 < z < b\}$ le cylindre,
 $S_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0\} = \{s(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \mid \theta \in [-\pi, \pi], r \in [0, 1]\}$ le disque au niveau $z = 0$ et
 $S_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, z = b\} = \{s(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, b) \mid \theta \in [-\pi, \pi], r \in [0, 1]\}$ le disque au niveau $z = b$. Alors S est la réunion disjointes de S_0, S_1 et S_2 i.e. $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ et par additivité de l'intégrale on a

$$flux(\vec{v}, S) = flux(\vec{v}, S_0) + flux(\vec{v}, S_1) + flux(\vec{v}, S_2).$$

- b) On calcul maintenant le flux de $\vec{v}$ à travers chacune des surfaces S_0, S_1 et S_2 , en utilisant leurs paramétrisations.

- i) Pour S_0 : on a $\frac{\partial s}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial s}{\partial z} = \begin{pmatrix} -a \sin \theta \\ a \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$flux(\vec{v}, S_0) = \int_0^b \int_{-\pi}^{\pi} \vec{v}(s(\theta, z)) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial s}{\partial z} \right) d\theta dz = \int_0^b \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} a^2 \cos^2 \theta \\ a^2 \sin^2 \theta \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta dz = \int_0^b dz \int_{-\pi}^{\pi} (a^3 \cos^3 \theta + a^3 \sin^3 \theta) d\theta = \boxed{0}.$$

(puisque $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 \theta d\theta = 0$ voir l'exercice précédent)

- ii) Pour S_1 : on a $\frac{\partial s}{\partial r} \wedge \frac{\partial s}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ et S_1 est orientée vers les z négatifss d'où

$$flux(\vec{v}, S_1) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \vec{v}(s(r, \theta)) \cdot \left(-\frac{\partial s}{\partial r} \wedge \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \theta \\ r^2 \sin^2 \theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a 0 dr d\theta = \boxed{0}.$$

- iii) Pour S_2 : on a $\frac{\partial s}{\partial r} \wedge \frac{\partial s}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ et S_2 est orientée vers les z positifs d'où

$$flux(\vec{v}, S_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \vec{v}(s(r, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial r} \wedge \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \theta \\ r^2 \sin^2 \theta \\ b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a b^2 r dr d\theta = \boxed{a^2 b^2 \pi}.$$

Finalement, S est la réunion disjointes de S_0, S_1 et S_2 , le flux de $\vec{v}$ à travers S est donc égal à

$$flux(\vec{v}, S) = flux(\vec{v}, S_0) + flux(\vec{v}, S_1) + flux(\vec{v}, S_2) = 0 + 0 + a^2 b^2 \pi = \boxed{a^2 b^2 \pi}$$

2. La surface S est fermée et est le bord du cylindre plein $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, 0 < z < b\} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \mid \theta \in [-\pi, \pi], r \in [0, a], z \in [0, b]\}$ donc $S = \partial V$.

On peut alors utiliser la formule d'Ostrogradski pour calculer le flux d'un champ de vecteurs à travers la surface S .

On a $div(\vec{v}) = 2x + 2y + 2z$, et en utilisant les coordonnées cylindriques on aura

$$\begin{aligned} \iiint_V div(\vec{v}) dx dy dz &= 2 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz = 2 \int_0^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a (r \cos \theta + r \sin \theta + z) r dr d\theta dz \\ &= 2 \int_0^b dz \int_0^a r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta + 2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_0^b z dz = 0 + \pi a^2 b^2 = a^2 b^2 \pi. \end{aligned}$$

Alors, d'après la formule d'Ostrogradski $flux(\vec{v}, S) = \iiint_V div(\vec{v}) dx dy dz = \boxed{a^2 b^2 \pi}$

on retrouve ainsi le résultat de 2.