Université de Rennes

2024–2025

L2 : Outils mathématiques 4
Feuille de TD $n°$6 :
les corrigés de certains exercices qui n'ont pas été traités en td

1. Intégrales curvilignes

Exercice 1.1. Calculer la longueur de chacun des arcs de courbes suivant :

1) $x = y^2$ avec $0 \leqslant y \leqslant 1$;
2) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ avec $0 \leqslant t \leqslant t_0$;
Solution: Alors $dx = x'(t)dt = -a\sin t\,dt$ et $dy = y'(t)\,dt = a\cos t\,dt$ et $dz = z'(t)\,dt = bdt$, ainsi la longueur de l'arc est égale à

$$\int_0^{t_0} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt = \int_0^{t_0} \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2}dt = \int_0^{t_0} \sqrt{a^2 + b^2}dt = \boxed{t_0\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3) La cardioide d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$ avec $a > 0$ et $0 \leqslant \rho \leqslant a$
4) L'astroïde de paramétrage $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$
5) Une arche de cycloïde de paramétrage $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 1.2. La chaînette est la courbe décrite par un fil pesant, homogène, tenu à ses deux extrémités. Dans un repère approprié, elle admet pour équation $y(x) = \cosh(x)$. Déterminer la longueur d'un arc de chaînette
Solution: Soit $x_1 < x_2$, on peut prendre pour paramétrisation d'un arc de chaînette entre x_1 et x_2 : $\gamma(x) = (x, \cosh(x))$ avec $x \in [x_1, x_2]$. Alors $x' = 1$ et $dy = y'(x)\,dx = \sinh(x)dx$, ainsi la longueur de l'arc est égale à

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \sinh^2(x)}dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\cosh^2(x)}dx = \int_{x_1}^{x_2} \cosh(x)dx = [\sinh(x)]_{x_1}^{x_2} = \boxed{\sinh(x_2) - \sinh(x_1)}.$$

Exercice 1.3. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{C^+} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$
où C^+ est le cercle unité orienté dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d ?une montre).

Exercice 1.4. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{C^+} xy\,dx + (x+y)\,dy$

Exercice 1.5.

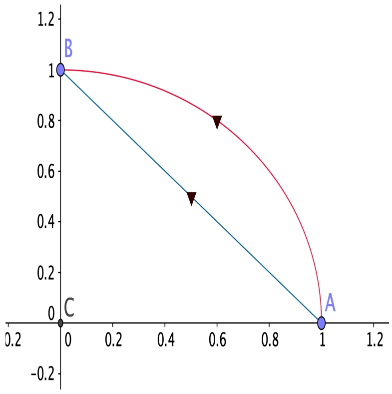
1. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (y^2, x^2)$ sur la demi ellipse $x^2 + 4y^2 - 4 = 0; y \geqslant 0$ parcourue une fois dans le sens direct.
2. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (\cos(x), \sin(y))$ sur le cercle unité parcouru deux fois dans le sens des aiguilles d'une montre.
3. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ sur le triangle OAB avec $A = (1,0)$, $B = (0,1)$ parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice 1.6. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma \frac{y+z}{x^2+y^2}\,dx + \frac{z+x}{x^2+y^2}\,dy + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dz$ lorsque :

1) γ est le segment de droite d'origine $A = (1,1,1)$ et d'extrémité $B = (2,2,2)$.
2) γ est l'hélice définie par $x = \cos t$, $y = \sin t$ et $z = t$, t variant de 0 à 2π.

Exercice 1.7. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma y^2\,dx - x^2\,dy$ lorsque :

1) Γ est le segment de droite d'origine $A = (1,0)$ et d'extrémité $B = (0,1)$.
2) Γ est l'arc de cercle de centre $(0,0)$, de rayon 1 d'origine $A = (1,0)$ et d'extrémité $B = (0,1)$.



Solution:
On a $\dfrac{\partial(y^2)}{\partial y} = 2y \neq -2x = \dfrac{\partial(-x^2)}{\partial x}$, la forme différentielle $\omega = y^2\,dx - x^2\,dy$ n'est pas fermée, par conséquent n'est pas exacte, on doit alors faire le calcul en utilisant une paramétrisation.

1) une paramétrisation Γ du segment $[A,B]$ est donnée par $\Gamma(t) = A + t(B-A) = (1-t,t)$ avec $t \in [0,1]$, d'où

$$\begin{aligned}\int_\Gamma y^2\,dx - x^2\,dy &= \int_0^1 \left(t^2(-1) - (1-t)^2(1)\right)dt = \int_0^1 \left(-t^2 - (1-t)^2\right)dt\\ &= \left[\frac{-t^3}{3} + \frac{(1-t)^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{-\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

2) Une paramétrisation Γ du quart de cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1, d'origine $A=(1,0)$ et d'extrémité $B=(0,1)$ est $\Gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ avec $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, ainsi

$$\begin{aligned}\int_\Gamma y^2\,dx - x^2\,dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 t(-\sin t) - \cos^2 t(\cos t)\right)dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt\\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(1-\cos^2 t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(1-\sin^2 t)dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin t\cos^2 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin^2 t dt\\ &= \left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} = \boxed{-\frac{4}{3}}.\end{aligned}$$

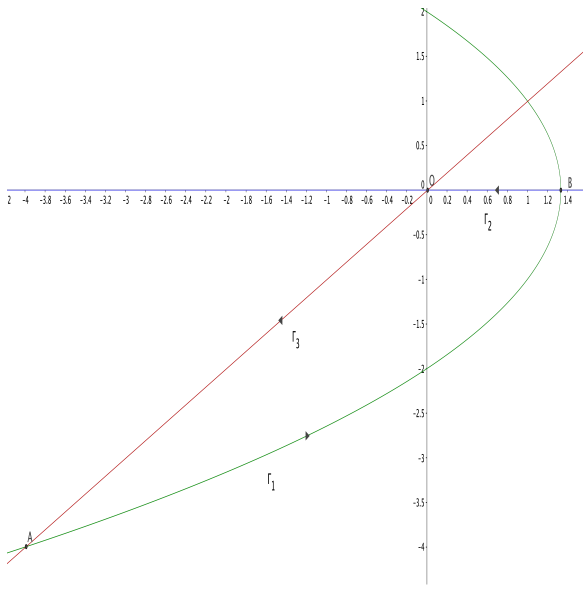
Exercice 1.8. Montrer que l'intégrale curviligne $\int_\Gamma xy^2\,dx + x^2y\,dy$ est nulle lorsque Γ est un arc simple fermé (sans calcul de primitive). Calculer cette intégrale lorsque $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où $\Gamma_1 = AB$ est l'arc de parabole d'équation $y^2 = 4-3x$ limité en A par la droite d'équation $y=x$ et en B par l'axe des $x \geqslant 0$, Γ_2 est le segment de droite allant de B à O et Γ_3 est le segment de droite allant de O à A.
Calculer une primitive de $xy^2\,dx + x^2y\,dy$. Retrouver $\int_{\Gamma_i} xy^2\,dx + x^2y\,dy$ pour $i \in \{1,2,3\}$.
Solution:

1) On a $\dfrac{\partial(xy^2)}{\partial y} = 2yx = \dfrac{\partial(x^2y)}{\partial x}$, la forme différentielle $\omega = xy^2\,dx + x^2y\,dy$ est fermée, comme son domaine de définition $\mathbb{R}^2$ qui est étoilé, le théorème de Poincaré nous assure qu'elle est exacte, en particulier son intégrale curviligne est nulle le long de tout arc fermé (et bien sûr s'il est en plus simple).
2) Les abscisses des points d'intersections entre la parabole $y^2 = 4-3x$ et la droite $y=x$ sont les solutions de $x^2+3x-4=0$ après calcul on trouve $x=1$ et $x=-4$, par suite $y=1$ et $y=-4$ respectivement. On prend par exemple $A=(-4,-4)$. L'abscisse du point B est solution de $0 = 4-3x$, d'où $x = \frac{4}{3}$, ainsi $B = (\frac{4}{3},0)$. On passe maintenant au paramétrage ; on peut choisir les paramétrisations suivantes :
   (a) $\Gamma_2(t) = (\frac{4}{3}-t, 0)$ avec $t \in [0,\frac{4}{3}] \implies x'(t) = -1, y'(t) = 0$, alors

$$\int_{\Gamma_2} xy^2\,dx + x^2y\,dy = \int_0^{\frac{4}{3}} \left((\frac{4}{3}-t)(0^2)(-1) + 0(\frac{4}{3}-t)^2(0)\right)dt = \int_0^{\frac{4}{3}} 0dt = \boxed{0}.$$

   (b) $\Gamma_3(t) = (-t,-t)$ avec $t \in [0,4] \implies x'(t) = -1, y'(t) = -1$, alors

$$\int_{\Gamma_3} xy^2\,dx + x^2y\,dy = \int_0^4 \left((-t)(-t^2)(-1) + (-t)(-t)^2(-1)\right)dt = 2\int_0^4 t^3 dt = 2\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^4 = 2\times 4^3 = \boxed{128}.$$



(c) $\Gamma_1(t)=(\frac{4-t^2}{3},t)$ avec $t\in[-4,0] \implies x'(t)=\frac{-2t}{3}$, $y'(t)=1$, alors

$$\int_{\Gamma_1} xy^2\,dx+x^2y\,dy=\int_{-4}^{0}\left(\left(\frac{4-t^2}{3}\right)t^2(\frac{-2t}{3})+t\left(\frac{4-t^2}{3}\right)^2(1)\right)dt=\int_{-4}^{0}\left(\frac{-2t^3}{3}\left(\frac{4-t^2}{3}\right)+t\left(\frac{4-t^2}{3}\right)^2\right)dt$$

on pourrait développer le polynôme et intégrer pour trouver le résultat, mais on va plutôt utiliser le résultat de 1), $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ étant un arc fermé, $\int_\Gamma xy^2\,dx+x^2y\,dy=0$, d'où $\int_{\Gamma_1} xy^2\,dx+x^2y\,dy=-\int_{\Gamma_2} xy^2\,dx+x^2y\,dy-\int_{\Gamma_3} xy^2\,dx+x^2y\,dy=0-128=\boxed{-128}$.

3) On sait d'après 1) que $xy^2\,dx+x^2y\,dy$ est une forme exacte donc elle admet des primitives ; si une fonction f est une primitive de $xy^2\,dx+x^2y\,dy \implies \begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=xy^2 \implies f=\frac{x^2y^2}{2}+g(y) \text{ et}\\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^2y \implies \frac{\partial g}{\partial y}=0 \implies g \text{ est constante}\end{cases}$

En choisissant $g=0$ on aura que $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{2}$ est une primitive de $xy^2\,dx+x^2y\,dy$. Maintenant, à l'aide de f, on fait les calculs

(a) $\int_{\Gamma_1} xy^2\,dx+x^2y\,dy=f(B)-f(A)=\frac{(\frac{4}{3})^2\times 0^2}{2}-\frac{(-4)^2\times(-4)^2}{2}=-\frac{4^4}{2}=\boxed{-128}$

(b) $\int_{\Gamma_2} xy^2\,dx+x^2y\,dy=f(O)-f(B)=0-0=\boxed{0}$

(c) $\int_{\Gamma_3} xy^2\,dx+x^2y\,dy=f(A)-f(O)=128-0=\boxed{128}$

On retrouve bien les résultats de 2).

Attention : l'énoncé de cet exercice ne précise pas lequel des points d'intersection de la parabole d'équation $y^2=4-3x$ avec la droite $y=x$ il faudrait prendre ; dans la configuration traitée ci-dessus on a choisi $A=(-4,4)$, je vais maintenant traiter le second choix du point d'intersection c-à-d $A=(1,1)$. Les autres points ne changent pas : $O=(0,0)$ et $B=(\frac{4}{3},0)$.

1) On a $\dfrac{\partial(xy^2)}{\partial y}=2yx=\dfrac{\partial(x^2y)}{\partial x}$, la forme différentielle $\omega=xy^2\,dx+x^2y\,dy$ est fermée, comme son domaine de définition $\mathbb{R}^2$ qui est étoilé, le théorème de Poincaré nous assure qu'elle est exacte, en particulier son intégrale curviligne est nulle le long de tout arc fermé (et bien sûr s'il est en plus simple).

2) On passe maintenant au paramétrage ; on peut choisir les paramétrisations suivantes :

(a) $\Gamma_2(t)=(\frac{4}{3}(1-t),0)$ avec $t\in[0,1] \implies x'(t)=-1$, $y'(t)=0$, alors

$$\int_{\Gamma_2} xy^2\,dx+x^2y\,dy=\int_0^1\left((\frac{4}{3}(1-t))(0^2)(-\frac{4}{3})+0(\frac{4}{3}(1-t))^2(0)\right)dt=\int_0^1 0\;dt=\boxed{0}.$$

(b) $\Gamma_3(t)=(t,t)$ avec $t\in[0,1] \implies x'(t)=1$, $y'(t)=1$, alors

$$\int_{\Gamma_3} xy^2\,dx+x^2y\,dy=\int_0^1\left((t^3(1)+t^3(1)\right)dt=2\int_0^1 t^3dt=2\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

(c) $\Gamma_1(t) = (\frac{4-(1-t)^2}{3}, 1-t)$ avec $t \in [0,1] \implies x'(t) = \frac{-2(1-t)}{3}$, $y'(t) = -1$,
comme dans l'autre cas, on va utiliser le résultat de 1) pour calculer $\int_{\Gamma_1} xy^2\,dx + x^2y\,dy$. Puisque $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ est une courbe fermée, $\int_\Gamma xy^2\,dx + x^2y\,dy = 0$, d'où

$\int_{\Gamma_1} xy^2\,dx + x^2y\,dy = -\int_{\Gamma_2} xy^2\,dx + x^2y\,dy - \int_{\Gamma_3} xy^2\,dx + x^2y\,dy = 0 - \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$.

3) les mêmes calculs donne $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2}$ comme primitive de $xy^2\,dx + x^2y\,dy$. Maintenant, à l'aide de f, on aura

(a) $\int_{\Gamma_1} xy^2\,dx + x^2y\,dy = f(B) - f(A) = \frac{(\frac{4}{3})^2 \times 0^2}{2} - \frac{(1)^2 \times (1)^2}{2} = -\frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

(b) $\int_{\Gamma_2} xy^2\,dx + x^2y\,dy = f(O) - f(B) = 0 - 0 = \boxed{0}$

(c) $\int_{\Gamma_3} xy^2\,dx + x^2y\,dy = f(A) - f(O) = \frac{1}{2} - 0 = \boxed{\frac{1}{2}}$

On retrouve bien les résultats de 2).

Exercice 1.9. Déterminer une fonction u, dont on précisera le domaine de définition, telle que :

$$du = \frac{x+2y}{(x+y)^2}\,dx + \frac{y}{(x+y)^2}\,dy$$

Exercice 1.10. Calculer le travail effectué par la force $\overrightarrow{F} = (y+z)\,\overrightarrow{i} + (x+z)\,\overrightarrow{j} + (x+y)\,\overrightarrow{k}$ pour déplacer une particule de l'origine O au point $C = (1,1,1)$:

1. le long de la droite (OC).
2. le long de la courbe $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$.

Même question pour la force $\overrightarrow{G} = (x+yz)\,\overrightarrow{i} + (y+xz)\,\overrightarrow{j} + (z+xy)\,\overrightarrow{k}$.

Solution:

1) Le calcul des dérivées partielles donne : $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{2x^2y^2 - 3y^4 - 3x^4}{x^2y^2} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, la forme ω est donc fermée. Le domaine $D = \{(x,y); x > 0, y > 0\}$ est convexe, en effet, si $M_0 = (x_0, y_0)$ et $M_1 = (x_1, y_1)$ sont des points de D, alors pour tout $t \in [0,1]$ on a $M_0 + t(M_1 - M_0) = (1-t)M_0 + tM_1 = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1) \in D$, car $(1-t)x_0 + tx_1 > 0$ et $(1-t)y_0 + ty_1 > 0$.
La forme ω est alors fermée sur un domaine convexe (donc étoilé) est alors totale (i.e. exacte) d'après le théorème de Poincaré.

2) On a $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = \dfrac{(3x^2 - y^2)(x^2+y^2)}{x^2y} = \dfrac{2x^2y^2 + 3x^4 - y^4}{x^2y} = 2y + \dfrac{3x^2}{y} - \dfrac{y^3}{x^2}$ d'où
$u = 2y\displaystyle\int dx + \frac{1}{y}\int 3x^2dx + y^3\int \frac{-1}{x^2}\,dx + g(y) = 2xy + \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} + g(y)$ d'autre part
$Q(x,y) = \dfrac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2)}{xy^2} = 2x + \dfrac{3y^2}{x} - \dfrac{x^3}{y^2} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x - \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{3y^2}{x} + g'(y)$, d'où $g'(y) = 0$.

Comme g est constante on peut choisir $g = 0$ par suite $\boxed{u = 2xy + \dfrac{x^3}{y} + \dfrac{y^3}{x}}$.

3) L'arc Γ a pour origine $(x(0), y(0)) = (1,1)$ et d'extrémité $(x(2\pi), y(2\pi)) = (2\pi+1, 1)$, alors

$$\int_\Gamma \omega = u(2\pi+1, 1) - u(1,1) = 2(2\pi+1) + \frac{1}{2\pi+1} + (2\pi+1)^3 - 4 \approx 397$$

Exercice 1.11. Soit $\mathcal{D}$ le domaine limité par le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$ parcouru dans le sens direct. Calculer à l'aide de la formule de Green-Riemann $\iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2)dxdy$.

Exercice 1.12. Calculer l'intégrale curviligne I le long de la courbe fermée γ constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$, orientée dans le sens direct où $I = \displaystyle\int_\gamma (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$. Vérifier le résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.

Solution: La courbe fermée γ est formée de deux arcs : γ_1 va de $(0,0)$ à $(1,1)$ en suivant la courbe $y = x^2$ et γ_2 va de $(1,1)$ à $(0,0)$ et suit la courbe $x = y^2$. On peut donc prendre pour paramétrisation : $\gamma_1(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^2)$ avec $t \in [0,1]$ orienté dans le sens direct et $\gamma_2 = (x(t), y(t)) = (t^2, t)$ avec $t \in [0,1]$, mais orienté dans le sens inverse. Alors,

$$I = \int_\gamma (2xy - x^2)dx + (x+y^2)dy = \int_{\gamma_1^+} (2xy - x^2)dx + (x+y^2)dy + \int_{\gamma_2^-} (2xy - x^2)dx + (x+y^2)dy.$$

où $\displaystyle\int_{\gamma_1^+}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy = \int_0^1((2t^3-t^2).(1)+(t+t^4).(2t))dt = \int_0^1(t^2+2t^3+2t^5)dt = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{7}{6}$

$\displaystyle\int_{\gamma_2^-}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy = -\int_0^1((2t^3-t^4).(2t)+(t^2+t^2).(1))dt = -\int_0^1(2t^2+4t^4-2t^5)dt = -(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{1}{3}) = -\frac{17}{15}$

Ainsi, $\displaystyle I = \int_\gamma (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy = \frac{7}{6}-\frac{17}{15} = \boxed{\frac{1}{30}}$.
Vérifions maintenant le résultat à l'aide de la formule de Green-Riemann.
Le domaine D bordé par la courbe γ est $D = \{(x,y) \mid x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x},\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ et $\gamma = \partial D$. On a d'après la formule de Green-Riemann :

$$\int_\gamma (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy = \iint_D (\frac{\partial(x+y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy-x^2)}{\partial y})dxdy$$

$$= \iint_D (1-2x)dxdy = \int_0^1 (1-2x)\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\right)dx = \int_0^1 (1-2x)(\sqrt{x}-x^2)dx = \int_0^1 (\sqrt{x}-x^2-2x^{\frac{3}{2}}+2x^3)dx$$

$$= \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} - \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{30}}.$$