

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Calcul Différentiel et optimisation</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Extrema locaux (ou relatifs)</b>	<b>5</b>
1.1	Introduction . . . . .	5
1.1.1	Généralisation aux fonctions de plusieurs variables . . . . .	6
1.1.2	Exemple : Méthode des moindres carrés, droite de régression . . . . .	8
1.1.3	Le test de la dérivée seconde . . . . .	11
1.1.4	Le test de la dérivée seconde pour les fonction à deux variables . . . . .	13
1.2	Le test de la dérivée seconde en toute dimension . . . . .	17
1.3	Extrema liés (ou sous contraintes). Multiplicateurs de Lagrange . . . . .	22
1.3.1	Extrema d'une fonction sur un compact. . . . .	22
1.3.2	Extrema sous une seule contrainte . . . . .	24
1.3.3	Généralisation à plusieurs contraintes : . . . . .	27
<b>II</b>	<b>Intégrales multiples</b>	<b>31</b>
1.4	Une introduction à la mesure . . . . .	32
1.4.1	Mesure des figures canoniques . . . . .	32
1.4.2	Le problème de la mesure . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Rappels sur l'intégrale de Riemann</b>	<b>37</b>
2.1	Techniques de calcul . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Intégrales doubles</b>	<b>45</b>
3.0.1	Propriétés des intégrales doubles : . . . . .	48
3.0.2	Comment calculer une intégrale double? . . . . .	48
3.0.3	Calcul d'intégrales doubles à l'aide d'intégrales simples . . . . .	50

3.0.4	Les coordonnées polaires :	58
3.1	Applications	60
3.2	Changement de variables	64
3.2.1	Retour aux changement de variables en coordonnées polaires	65
3.2.2	Le changement de variables dans une intégrale double	67
<b>4</b>	<b>Intégrales triples</b>	<b>75</b>
4.0.1	Calcul d'intégrales triples à l'aide d'intégrales doubles et simples	77
4.0.2	Changement de variables dans une intégrale triple	82
4.0.3	Applications : Masse, centre de gravité et moment d'inertie	94
<b>III</b>	<b>Intégrale curviligne et intégrale de surface</b>	<b>99</b>
<b>5</b>	<b>Intégrale curviligne</b>	<b>100</b>
5.1	Courbes paramétrées	100
5.2	Intégrales curvilignes d'une forme différentielle et circulation d'un champ de vecteurs	105
5.2.1	Circulation (ou travail) d'un champ de vecteurs	110
5.2.2	Circulation (ou travail) d'un champ de gradient	112
5.2.3	Primitive d'une forme différentielle (potentiel d'un champ de vecteurs)	115
5.2.4	Méthode pour déterminer une primitive d'une forme différentielle (ou un potentiel d'un champ de vecteurs)	118
5.3	Formule de Green-Riemann	122
<b>6</b>	<b>Intégrales de Surface</b>	<b>129</b>
6.1	Surfaces paramétrées	129
6.1.1	Aire d'une surface	132
6.1.2	Invariance	135
6.1.3	Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface	135
6.1.4	Invariance	137
6.1.5	Lien entre travail et flux - Lien entre intégrale curviligne et l'intégrale de surface	138
6.1.6	Lien entre intégrale triple et intégrale de surface	141

**Introduction :**

Calcul différentiel et intégrales multiples (Licence SPM L2 )

Présentation enseignants

Jizhuang SHIH et Karim BEKKA

15 semaines de CM et TD : (soit 22,5h de cours, 22,5h de TD)

4 semaines Part.1(optimisation)

6 semaines Part.2 ( intégrale multiple)

5 semaines Part.3 (intégrales curvilignes et intégrales de surfaces)

Evaluation : 3 Contrôles continus

CC1 le 16 février de 13h15 à 14h45

CC2 le 27 avril de 13h15 à 14h45

CT (examen terminal (1er ou seconde session))

Note finale :  $N = \max(CT, (CC1+CC2+2CT)/4)$

Les règles suivantes seront appliquées en cas d'absences : en cas d'absence injustifiée à un contrôle la note 0 est attribuée à ce contrôle ; les abs ( CC1 ou CC2) donnent lieu à une "neutralisation" de la note : par exemple si on a une abs au CC1, la note finale est  $\max(CT, (CC2+CT)/2)$ .

Plan du cours

1. Extrema locaux et extrema liés (Part. 1)
2. intégrales multiples (Part. 2)
3. Intégrales curvilignes et intégrales de surfaces (Part. 3)

**Première partie**

**Calcul Différentiel et  
optimisation**

# Chapitre 1

## Extrema locaux (ou relatifs)

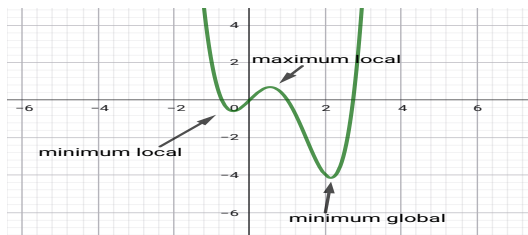
### 1.1 Introduction

Une question standard en analyse mathématique, est de déterminer où une fonction atteint ses extrema (relatifs ou absolus). L'optimisation a des applications dans divers domaines.

Considérons pour commencer le cas d'une variable; soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

#### 1.1.1 DÉFINITION

- 1)  $f$  admet un maximum (resp. minimum) global, (ou absolu), au point  $a$  si :  
pour tout  $x$  on a  $f(x) \leq f(a)$  (resp.  $f(x) \geq f(a)$ ) .  
Il est dit maximum global stricte (minimum global stricte) si pour tout  $x \neq a$  on a  $f(x) < f(a)$  (resp.  $f(x) > f(a)$ ).
- 2)  $f$  admet un maximum (resp. minimum) local au point  $a$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[, f(x) \leq f(a)$  (resp.  $f(x) \geq f(a)$ ).  
Il est dit maximum local strict (minimum local strict) si pour tout  $x \in ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[, x \neq a$  on a  $f(x) < f(a)$  (resp.  $f(x) > f(a)$ ).
- 3) Si  $f$  admet au point  $a$  un maximum ou un minimum, on dit que  $f$  admet un extremum en  $a$ .



## 1.1.2 REMARQUE

- 1) Un extremum global est un extremum local.
- 2) Si  $f$  admet un extremum local en  $a$ , alors le signe de  $f(x) - f(a)$  est constant dans un voisinage de  $a$ .

1.1.3 EXEMPLE. (i)  $f(x) = |x|$  a un minimum global en  $a = 0$ .(ii)  $f(x) = x^2$  a un minimum global en  $a = 0$ .(iii)  $f(x) = x^3$  n'a pas d'extremum local en  $a = 0$ , car  $f(x) - f(a) = x^3$ , change de signe dans tout voisinage de 0.

On a une condition nécessaire lorsque la fonction est dérivable

## 1.1.4 THÉORÈME

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $a$  alors  $f'(a) = 0$ .

*Démonstration:* Supposons que  $a$  est un minimum local. Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ ,  $f(x) \geq f(a)$ .

Alors l'accroissement  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  est  $\begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \in ]a, a + \varepsilon[ \\ \leq 0 & \text{si } x \in ]a - \varepsilon, a[ \end{cases}$

Comme  $f$  est dérivable en  $a$  on aura  $0 \geq f'_g(a) = f'(a) = f'_d(a) \geq 0$  d'où  $f'(a) = 0$ . ■

## 1.1.6 REMARQUE

La réciproque est fautive;  $f'(a) = 0$  n'implique pas que  $f$  a un minimum en  $a$ . La dérivée de la fonction  $f(x) = x^3$ , s'annule en 0, mais  $f$  n'a pas d'extremum local en 0.

## 1.1.1 Généralisation aux fonctions de plusieurs variables

## 1.1.7 DÉFINITION

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in U$ .

On dit que  $f$  présente un **minimum local** (respectivement un **maximum local**) au point  $a$  si  $f(a) \leq f(x)$  (respectivement  $f(a) \geq f(x)$ ) dans un voisinage de  $a$  c-à-d il existe un nombre réel  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x$  dans la boule  $B(a, \varepsilon)$ , centrée en  $a$  et de rayon  $\varepsilon$  on a

$$f(a) \leq f(x) \text{ (respectivement } f(a) \geq f(x)).$$

On dit que  $f$  présente un **extremum local** au point  $a$ , si elle présente soit un minimum local, soit un maximum local en ce point.

L'extremum local est dit strict s'il existe un voisinage de  $a$  où cet extremum n'est réalisé qu'au point  $a$ .

On dit que  $f$  présente un **extremum global (ou absolu)** au point  $a$ , si l'inégalité est vraie pour tout  $x \in U$ .

### 1.1.8 REMARQUE

Une fonction  $f$  a un extremum local en  $a$  si et seulement si  $f(x) - f(a)$  a un signe constant au voisinage de  $a$ . Le signe est positif si  $a$  est un minimum local et négatif si c'est un maximum local.

---

### 1.1.9 DÉFINITION

Le *gradient d'une fonction*  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  en  $a \in \mathbb{R}^n$  est défini par

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

(si les dérivées partielles existent).

---

### 1.1.10 DÉFINITION

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

On dit qu'un point  $a \in U$  est un point **critique** de  $f$  si  $\nabla f(a) = \mathbf{0}$ . On notera par  $\text{Crit}(f)$ , l'ensemble des points critique de  $f$  i.e.

$$\text{Crit}(f) = \{a \in U \mid \nabla f(a) = \mathbf{0}\}.$$


---

1.1.11 **EXEMPLE.** 1) si  $f(x, y) = x + y^2$ , alors  $\text{Crit}(f) = \emptyset$  (l'ensemble vide)

2) si  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , alors  $\text{Crit}(f) = \{(0, 0)\}$

3) si  $f(x, y) = (x + y)^2$ , alors  $\text{Crit}(f) = \{(x, y) \mid y = -x\}$  est une droite.

### 1.1.12 THÉORÈME ( LA CONDITION NÉCESSAIRE SUR LA DIFFÉRENTIELLE)

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ .

Si  $f$  est différentiable et présente un extremum local en  $a$ , alors  $a$  est un point critique i.e.  $\nabla f(a) = \mathbf{0}$ .

*Démonstration:* Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la fonction partielle d'une variable réelle  $f_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$  admet un extremum local en  $a_i$ , donc sa dérivée

$$\frac{df_i}{dt}(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

On fait de même avec les autres variables.  $\square$  ■

**1.1.14 REMARQUE.** 1. Le théorème précédent permet de limiter la recherche des extrema locaux aux points critiques.

2. La réciproque est fautive, un point peut être critique sans présenter d'extremum local. Par exemple :

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $f(x, y) = x^2 - y^2$  à  $(0, 0)$  comme point critique sans être un extremum. En effet,  $f(x, 0) > f(0, 0) > f(0, y)$  si  $xy \neq 0$ .

**1.1.15 DÉFINITION**

Un point critique qui n'est pas un extremum local est appelé *point selle* (ou *col*).

---

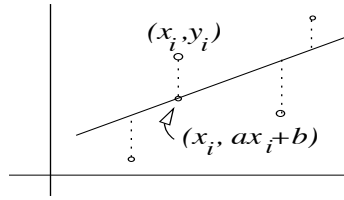
**1.1.2 Exemple : Méthode des moindres carrés, droite de régression**

Supposons que vous ayez un grand nombre  $n$  de points déterminés expérimentalement, statistique (appelé nuage de points), à travers lesquels vous voulez faire passer une courbe pour .

Soit un nuage de  $n$  points du plan,  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , et nous voulons trouver la droite (1)  $y = ax + b$  qui les approche "au mieux". En supposant que nos erreurs de mesure soient réparties aléatoirement selon la courbe habituelle en forme de cloche (la « distribution gaussienne »), on peut montrer que le bon choix de  $a$  et  $b$  est celui pour lequel la somme  $D$  des carrés des écarts

$$(2) \quad D = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

est un minimale. Dans la formule (2), les quantités entre parenthèses (montrées par des lignes pointillées dans l'image) sont les écarts entre les valeurs observées  $y_i$  et celles  $ax_i + b$  qui seraient prédites à l'aide de la droite (1).



Les écarts sont des carrés pour des raisons théoriques liées à la distribution d'erreur gaussienne supposée; notez cependant qu'il faut s'assurer que nous ne sommes que des quantités positives (et dérivables); c'est important, car nous ne voulons pas que les déviations de signe opposé s'annulent mutuellement. Cette méthode pour trouver la droite (1) est appelée **la méthode des moindres carrés**, et la droite résultante (1) est appelée **la droite des moindres carrés** ou la **droite de régression**. Pour calculer les valeurs de  $a$  et  $b$  qui font de  $D$  un minimum, on n'annule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial D}{\partial a}(a, b) = \sum_{i=1}^n 2(y_i - (ax_i + b))(-x_i) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial D}{\partial b}(a, b) = \sum_{i=1}^n 2(y_i - (ax_i + b))(-1) = 0 \quad (1.2)$$

Ceux-ci nous donnent un système d'équations linéaires pour déterminer  $a$  et  $b$ ,

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.3)$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \quad (1.4)$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}$$

(Notez que cela permet d'économiser beaucoup de travail pour dériver (2) en utilisant la règle de la dérivée d'une fonction composée, plutôt que de

développer d'abord les carrés.)

À partir de ce moment, on utilise l'algèbre linéaire pour déterminer  $a$  et  $b$ .

**1.1.16 Exercice** i) Montrer que pour  $x_1, \dots, x_n$  des nombres réels, on a toujours l'inégalité

$$n \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

$$\text{et que } n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

(indication : montrer d'abord le cas  $n = 2$ , en utilisant une identité remarquable.)

ii) En déduire que la matrice  $M = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}$  est inversible, donc le système à une solution unique, si les  $x_i$  ne sont pas identiques.

**1.1.17 EXEMPLE.** Déterminer la droite des moindres carrés lorsque le nuage est formé des points  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  et  $(2, 1)$ .

**Réponse :** Dans ce cas

$$D = (0 - (a \times 0 + b))^2 + (2 - (a \times 1 + b))^2 + (1 - (2a + b))^2 = b^2 + (2 - a - b)^2 + (1 - 2a - b)^2$$

(Rappelez-vous, les variables dont les valeurs sont à trouver sont  $a$  et  $b$ )

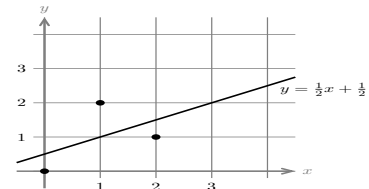
La recherche des points critiques de  $D$ , donne

$$\frac{\partial D}{\partial a}(a, b) = 0 \iff 5a + 3b = 4 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial D}{\partial b}(a, b) = 0 \iff 3a + 3b = 3 \quad (1.6)$$

Ce système à pour unique solution  $a = b = \frac{1}{2}$ . Ainsi la droite de meilleure

approximation (ou droite de régression) est  $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ .



### 1.1.3 Le test de la dérivée seconde

On commence par rappeler cette situation pour les fonctions d'une variable. Donnons-nous une fonction d'une variable  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^2$ .

#### 1.1.18 THÉORÈME (FORMULE DE TAYLOR À L'ORDRE 2)

Si  $f$  est une fonction deux fois continument dérivable (classe  $C^2$ ) sur  $\mathbb{R}$ , il existe  $c$  compris entre  $x$  et  $x + h$  tel que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(c)$$

Choisissons pour  $x$  un point  $x = a$  tel que  $f'(a) = 0$  et  $f''(a) \neq 0$ . Alors pour  $h$  assez petit, le terme  $\frac{h^2}{2}f''(c)$  est du même signe que  $f''(a)$ . Si par exemple  $f''(a) > 0$ , on en déduit que  $f$  a un minimum local en  $x$ .

La recherche pratique des extrema locaux pour une fonction d'une variable se passe donc ainsi :

- (i) On recherche les points critiques, i.e. les points  $a$  tel que  $f'(a) = 0$ .
- (ii) On étudie la dérivée seconde  $f''$  si  $a$  est un point critique et si
  - si  $f''(a) > 0$ , alors il y a un minimum local,
  - si  $f''(a) < 0$ , alors il y a un maximum local,
  - si  $f''(a) = 0$  il faut approfondir l'étude ( en considérant un développement de Taylor d'ordre supérieur).

#### 1.1.19 REMARQUE

Lorsque  $f$  n'est plus définie sur  $\mathbb{R}$  entier ou sur un intervalle ouvert, il faudra de plus étudier le comportement de  $f$  sur les bords du domaine de définition. Si l'ensemble de départ est compact, on a la garantie de l'existence d'extrema globaux.

1.1.20 EXEMPLE. 1) Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $f(x) = x$ . Alors  $f'(x) = 1 \neq 0$ , donc  $f$  n'a pas d'extremum local ( ni d'extremum global) sur  $\mathbb{R}$ . Par contre, la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[-2, 1]$ , admet en  $a = -2$  un minimum global,  $f(-2) = -2$  et un maximum global en  $a = 1$  qui vaut  $f(1) = 1$ .

2) Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $f(x) = x^2$ . Alors  $f'(x) = 2x = 0 \iff x = 0$  et comme  $f''(0) = 2 > 0$ , alors  $f$  admet un unique minimum local en  $x = 0$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 \geq 0 = f(0)$ , ce minimum est aussi un minimum global.

- 3) Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $f(x) = x^2 + \cos(x)$ . Alors  $f'(x) = 2x - \sin(x)$ , s'annule en 0, de plus  $f''(x) = 2 - \cos(x) \geq 1 > 0$ , entraîne que  $f'$  est strictement monotone, par suite  $f'(x) = 0$  a une unique solution, à savoir  $x = 0$ . On a vu que  $f''(0) > 0$ , par suite  $f$  à un minimum local en 0, ce minimum est aussi global ( $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ ).

Pour les fonctions de plusieurs variables la dérivées seconde est remplacée par la "matrice hessienne :"

### 1.1.21 DÉFINITION (MATRICE HESSIENNE)

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in U$ .

La matrice hessienne de  $f$  en  $a$  est la matrice symétrique réelle

$$\text{Hess}(f)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

et pour tout,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$  par le théorème de symétrie de Schwarz.

---

### 1.1.22 THÉORÈME (FORMULE DE TAYLOR À L'ORDRE 2)

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in U$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ , alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre 2 donné par

$$f(a + X) = f(a) + \langle \nabla f(a), X \rangle + \frac{1}{2} \langle \text{Hess}(f)(a)X, X \rangle + o(\|X\|^2)$$

où  $\langle V, W \rangle = {}^t V \cdot W = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$  est le produit scalaire standard de

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ par } W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{o(\|X\|^2)}{\|X\|^2} = 0 \text{ (c-à-d que } o(\|X\|^2) \text{ est}$$

négligeable par rapport à  $\|X\|^2$  au voisinage de  $X = 0$ .)

---

## 1.1.23 REMARQUE

Si on note la forme quadratique par  $Q(X) = \langle H_f(a)X, X \rangle$  où  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , alors, pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$Q(X) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j$$

où  $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ .

Par exemple pour  $n = 2$  on aura pour  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,

$$Q(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)y^2$$

### 1.1.4 Le test de la dérivée seconde pour la fonction à deux variables

On suppose  $f$  de classe  $C^2$ , c'est-à-dire que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et sont continues.

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \rightarrow f(x, y)$  de classe  $C^2$ . On suppose que  $(a, b)$  est un point critique i.e.  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ .

## 1.1.24 REMARQUE

Un extremum local est un point critique mais la réciproque n'est pas vraie.

**Notation :** On utilisera les notations (de Monge) :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \text{ et } \Delta = rt - s^2 = \det(\text{Hess}(f)(a, b)).$$

## 1.1.25 REMARQUE

Avec les notations de Monge, la forme quadratique  $Q(x, y)$  devient

$$Q(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

## 1.1.26 THÉORÈME (LE TEST DE LA DÉRIVÉE SECONDE )

Soient  $f$  de classe  $C^2$  et  $(a, b)$  un point critique de  $f$ .

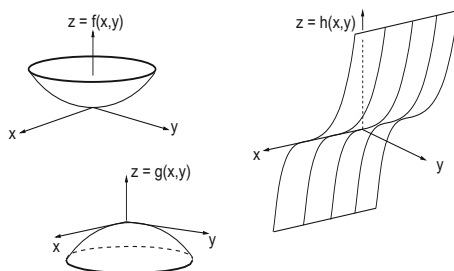
- si  $\Delta > 0$  et  $r > 0$ , la fonction  $f$  présente un minimum local strict en  $(a, b)$ .
- si  $\Delta > 0$  et  $r < 0$ , la fonction  $f$  présente un maximum local strict en  $(a, b)$ .
- si  $\Delta < 0$ , la fonction  $f$  ne présente pas d'extremum, elle a un point selle (ou col) en  $(a, b)$ .
- si  $\Delta = 0$  on ne peut conclure (le test échoue).

## 1.1.27 REMARQUE

si  $\Delta = 0$  on ne peut conclure avec le seul développement à l'ordre 2. En effet, si  $f(x, y) = x^4$ , alors  $\Delta(0, 0) = 0$  et  $f(x, y) = x^4 \geq 0 = f(0, 0)$ , d'où  $f$  à un minimum global en  $(0, 0)$ . De même, pour  $g(x, y) = -y^4$ ,  $\Delta(0, 0) = 0$  et  $g$  a un maximum global en  $(0, 0)$ . Finalement, pour  $h(x, y) = x^4 - y^4$  on a aussi  $\Delta(0, 0) = 0$ , mais  $h(x, 0) \geq 0$  et  $h(0, y) \leq 0$  alors  $(0, 0)$  est un point selle de  $h$ .

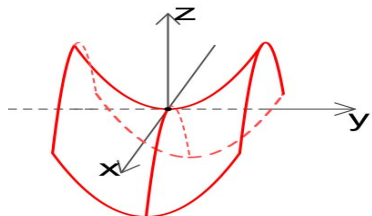
On remarquera que le développement de Taylor à l'ordre 2 de ces fonctions en  $(0, 0)$  a une partie principale nulle, ne donne aucune information sur le comportement des ces fonctions au voisinage de  $(0, 0)$ .

1.1.28 EXEMPLE. On considère les graphes des fonctions, définies sur  $\mathbb{R}^2$ , suivantes :  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $g(x, y) = -x^2 - y^2$  et  $h(x, y) = y^3$ .



Alors,  $f$  à un minimum global en  $(0, 0)$ , de même  $g$  à un maximum global en  $(0, 0)$ . Le critère de la second dérivée échoue pour,  $h$  en  $(0, 0)$ . Comme  $h(0, y) = y^3$ , elle change de signe en des points arbitrairement proches de  $(0, 0)$ , ainsi  $h$  a un point selle en  $(0, 0)$ .

1.1.29 **EXEMPLE.** La fonction  $k(x, y) = x^2 - y^2$  a un point selle (ou col) en  $(0, 0)$ .



1.1.30 **EXEMPLE.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ . Les points critiques de  $f$  sont  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ . Le premier est un point selle, le second un minimum local (non global). On a,

$\Delta(x, y) = \det \text{Hess}(f)(x, y) = 36xy - 9$  et  $r(x, y) = 6x$ , en utilisant le test de la dérivée seconde, on a le tableau suivant :

$(x, y)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$
$\Delta(x, y)$	$-9 < 0$	$27 > 0$
$r(x, y)$		$6 > 0$
nature du point	point selle	minimum local

*Démonstration: (du test de la seconde dérivée)* On doit étudier le signe  $f((a, b) + (x, y)) - f(a, b)$  lorsque  $(x, y)$  est au voisinage de  $(0, 0)$ . Puisque  $\nabla f((a, b)) = 0$ , la formule de Taylor à l'ordre 2 donne

$$f((a, b) + (x, y)) - f(a, b) = \frac{1}{2}Q(x, y) + o(\|(x, y)\|^2) = \frac{1}{2}(r(a)x^2 + 2s(a)xy + t(a)y^2) + o(\|(x, y)\|^2).$$

Alors la meilleure approximation quadratique de  $f(a + (x, y)) - f(a)$  est  $\frac{1}{2}Q(x, y)$ , donc pour étudier le signe de  $f((a, b) + (x, y)) - f(a, b)$  on est amené à étudier le signe de  $Q(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2$  pour  $(x, y)$  au voisinage de  $(0, 0)$ .

Soit  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Supposons par exemple que  $y \neq 0$ . Alors on peut écrire, en divisant par  $y^2$  et en posant  $u = \frac{x}{y}$  :  $Q(x, y) = y^2(ru^2 + 2su + t)$ , d'où le signe de  $Q(x, y)$  est égal à celui de  $P(u) = ru^2 + 2su + t$ .

On remarquera que le discriminant de  $P(u)$  est  $D = s^2 - rt = -\Delta$ .

- (i) Si  $D > 0$  le polynôme du second degré  $P(u)$  a deux racines distinctes, donc change de signe, ce qui se traduit par si  $\Delta < 0$ ,  $f((a, b) + (x, y)) - f(a, b)$  change de signe pour  $(x, y)$  au voisinage de  $(0, 0)$ ; ainsi  $(a, b)$  est un point selle.

- (ii) Si  $D < 0$ , le polynôme du second degré  $P(u)$  n'a pas de racines réelles, donc ne s'annule pas et son signe est celui de  $r$ .

$$\begin{cases} P(u) > 0 \text{ pour tout } u \text{ si } r > 0 \\ P(u) < 0 \text{ pour tout } u \text{ si } r < 0 \end{cases}$$

par suite

$$\begin{cases} f((a, b) + (x, y)) - f(a, b) > 0 \text{ pour tout } u \text{ si } r > 0 \\ f((a, b) + (x, y)) - f(a, b) < 0 \text{ pour tout } u \text{ si } r < 0 \end{cases}$$

Ainsi, si  $\Delta > 0$  et  $r > 0$ , la fonction  $f$  présente un minimum local strict en  $(a, b)$  et si  $\Delta > 0$  et  $r < 0$ , la fonction  $f$  présente un maximum local strict en  $(a, b)$ . ■

## 1.2 Le test de la dérivée seconde en toute dimension

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  et  $a \in U$  un point critique de  $f$ .

Alors, d'après le développement limité à l'ordre 2 de  $f$  on a

$$f(a + X) - f(a) = \frac{1}{2} \langle \text{Hess}(f)(a)X, X \rangle + o(\|X\|^2)$$

où  $\langle V, W \rangle = {}^tV.W = v_1w_1 + \dots + v_nw_n$  est le produit scalaire standard de

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ par } W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{o(\|X\|^2)}{\|X\|^2} = 0 \text{ (c-à-d que } o(\|X\|^2) \text{ est}$$

négligeable par rapport à  $\|X\|^2$  au voisinage de  $X = 0$ .)

Alors, le signe de  $f(a + X) - f(a)$  est en général celui de la forme quadratique  $\langle H_f(a)X, X \rangle$ .

### 1.2.1 DÉFINITION

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique d'ordre  $n$ .

1. On dit que  $A$  est **définie positive** si pour tout  $X \neq 0$ ,  $\langle AX, X \rangle > 0$ .
2. On dit que  $A$  est **définie négative** si pour tout  $X \neq 0$ ,  $\langle AX, X \rangle < 0$ .
3. On dit que  $A$  **n'est pas définie** s'il existe  $V_1$  et  $V_2$  tels que :  
 $\langle AV_1, V_1 \rangle > 0$  et  $\langle AV_2, V_2 \rangle < 0$ .

### 1.2.2 THÉORÈME ( LE TEST DE LA DÉRIVÉE SECONDE)

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois différentiable,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in U$  un point critique de  $f$  (c-à-d  $\nabla f(a) = 0$ ). Alors

1. Si  $\text{Hess}(f)(a)$  est définie positive,  $f$  présente un minimum strict en  $a$ .
2. Si  $\text{Hess}(f)(a)$  est définie négative,  $f$  présente un maximum strict en  $a$ .
3. Si  $\text{Hess}(f)(a)$  n'est pas définie,  $f$  à un point selle en  $a$ .

---

*Démonstration:* c'est une conséquence directe du fait que le signe de  $f(a + X) - f(a)$  est celui de la forme quadratique  $\langle \text{Hess}(f)(a)X, X \rangle$ . ■

1.2.4 PROPOSITION

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique d'ordre  $n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes

1.  $A$  est **définie positive**
2.  $A$  a toutes ses valeurs propres strictement positives.
3. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\det A_i > 0$  où  $A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$ .

*Démonstration: (idée de la preuve)* Comme  $A$  est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, il existe donc des réels, appelées valeurs propres,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , et une base orthonormée de vecteurs propres  $V_1, V_2, \dots, V_n$  tels que :

$$\text{pour tout } i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ et tout } j \in \{1, 2, \dots, n\}, \langle V_i, V_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et  $AV_i = \lambda_i V_i$ .

Par suite, comme  $X = x_1 V_1 + x_2 V_2 + \dots + x_n V_n$ , alors

$$\langle AX, X \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

On en déduit que " $A$  a toutes ses valeurs propres strictement positives"  $\iff \langle AX, X \rangle > 0$ , pour tout  $X \neq 0$  i.e.  $A$  est **définie positive**. ■

1.2.6 REMARQUE

$A$  définie négative  $\iff -A$  définie positive.

1.2.7 COROLLAIRE

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique d'ordre  $n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes

1.  $A$  est **définie négative**
2.  $A$  a toutes ses valeurs propres strictement négatives.
3. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $(-1)^i \det A_i > 0$ , où  $A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$

□

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in U$ .

La matrice hessienne de  $f$  en  $a$  est la matrice symétrique réelle  $Hess(f)(a) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Le théorème suivant généralise le test de la dérivée seconde.

### 1.2.8 THÉORÈME

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois différentiable,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in U$  un point critique de  $f$  (c-à-d  $\nabla f(a) = 0$ ). Alors

1. Si  $Hess(f)(a)$  a toutes ses valeurs propres strictement positives, alors  $f$  présente un minimum strict en  $a$ .
2. Si  $Hess(f)(a)$  a toutes ses valeurs propres strictement négative, alors  $f$  présente un maximum strict en  $a$ .
3. Si  $Hess(f)(a)$  a une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, alors  $f$  a un point selle en  $a$ .

### 1.2.9 REMARQUE.

1. On déduit du théorème précédent, que si le déterminant  $\det Hess(f)(a) = 0$  et  $Hess(f)(a)$  a toutes ses valeurs propres  $\geq 0$ , (resp. Si  $Hess(f)(a)$  a toutes ses valeurs propres  $\leq 0$ ) le test échoue : on ne peut rien conclure a priori, avec un développement limité d'ordre 2.
2. Les conditions du théorème sont seulement suffisantes.  
En effet,  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4$  présente au point critique  $a = (0, 0, 0)$  un minimum strict (global) même si  $\det Hess(f)(a) = 0$ .
3. Il se peut qu'une fonction présente en un point un minimum en restriction à toute droite passant par ce point, bien qu'elle ne présente pas de minimum en ce point :  
Par exemple,  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$  on a le long de toute droite vectoriel  $ax + by = 0$ ,  $f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$  dans un certain voisinage de  $(0, 0)$  (qui dépend de  $a$  et  $b$ ), mais le long de la parabole  $y = 2x^2$ ,  $f(x, 2x^2) = -x^4 \leq 0$ , donc  $(0, 0)$  n'est pas un extremum.

1.2.10 EXEMPLE. Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^3$ , par  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$ .

On commence par déterminer les points critiques :

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2yz = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2xz = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2xy = 0 \end{cases}$$

On trouve que l'ensemble des points critique de  $f$  est

$$\text{Crit}(f) = \{(0, 0, 0), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (-1, -1, -1)\},$$

et la hessienne en un point  $(x, y, z)$  est la matrice

$$\text{Hess}(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 2z & 2y \\ 2z & 2 & 2x \\ 2y & 2x & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) On a  $\text{Hess}(f)(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , qui a une unique valeur propre  $\lambda = 2 > 0$  ( de multiplicité 3), ainsi elle est définie positive, d'où  $f$  présente un **minimum local strict** en  $(0, 0, 0)$ .

(ii) Au point  $(-1, -1, -1)$ , on a  $A = H_f(-1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

On va calculer le polynôme caractéristique  $P_A(\lambda)$ , pour déterminer les valeurs propres de  $A$ .

En utilisant les propriétés des déterminants, on aura

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & -2 \\ -2 & 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -2 & -2 \\ -2 - \lambda & 2 - \lambda & -2 \\ -2 - \lambda & -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(2 + \lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 - \lambda & -2 \\ 1 & -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(2 + \lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = -(2 + \lambda)(4 - \lambda)^2 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $A$  sont  $-2$  et  $4$ , qui sont non nulles et de signes contraires.

Ainsi, on a montré que  $A = H_f(-1, -1, -1)$  n'est pas définie, d'où  $f$  présente un point selle en  $(-1, -1, -1)$ .

1.2.11 **Exercice** Déterminer la nature des points critiques  $(1, -1, 1)$ ,  $(1, 1, -1)$  et  $(-1, 1, 1)$  de la fonction de l'exemple précédent.

1.2.12 **Exercice** Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$ , par  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + xy$ . Étudier les extrema locaux de  $f$ .

## 1.3 Extrema liés (ou sous contraintes). Multiplicateurs de Lagrange

### 1.3.1 Extrema d'une fonction sur un compact.

La marche à suivre pour étudier les extrema d'une fonction différentiable sur un compact ( fermé et borné) de  $\mathbb{R}^n$  est la suivante.

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  définie sur un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ . Comme  $f$  est différentiable, elle est continue. Elle est donc bornée sur  $K$  et atteint ses bornes.

En pratique, la fonction  $f$  sera donnée par une formule valable sur un certain ouvert sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  et le compact  $K$  sera inclus dans cet ensemble de définition.

On mène l'étude des extrema de  $f$  en plusieurs étapes. La première est d'étudier l'existence d'extrema locaux de  $f$  à l'intérieur de  $K$ , c-à-d le plus grand ouvert contenu dans  $K$  noté  $\overset{\circ}{K}$ . C'est pour cette étude qu'on utilisera le développement de Taylor à l'ordre 2, ou le test de la dérivées seconde, donné ci-dessus.

Mais cette étude n'est pas suffisante. Il faut aussi regarder ce qui se passe sur le bord de  $K$ , qui le complémentaire de  $\overset{\circ}{K}$  dans  $K$ ; noté  $\partial K$ . Pour cela on procède autrement. Comme par exemple dans ce qui suit.

**1.3.1 EXEMPLE.** Etude des extrema de  $f(x, y) = x^2 - y^2$  sur  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ . On procède de la manière suivante :

(i) On cherche les points critiques et les extrema locaux dans  $\overset{\circ}{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$ , qui n'est autre que le disque ouvert de centre  $(0,0)$  et de rayon 1.

On trouve un seul point critique à savoir  $(0,0)$ . Mais en  $(0,0)$ ,  $f$  a un point selle. La fonction n'a donc pas d'extremum à l'intérieur de  $K$ . Mais comme  $K$  est compact et  $f$  est continue sur  $K$ ,  $f$  est bornée sur  $K$  et atteint ses bornes sur  $K$ . Ce sera donc sur le bord de  $K$ .

(ii) On analyse  $f$  sur le bord  $\partial K = K \setminus \overset{\circ}{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ .

Une possibilité ici est de paramétrer le bord de  $K$  : le cercle de rayon 1 centré en  $(0,0)$ , dont une paramétrisation est donnée par  $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$ .

La restriction de  $f$  à  $\partial K$  et alors la fonction d'une variable  $g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$ . On peut alors étudier les variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . On obtient qu'elle atteint son maximum qui vaut  $t = 1$ , aux points  $t = 0, t = \pi$  et  $t = 2\pi$  et son minimum qui vaut  $-1$  aux points  $t = \frac{\pi}{2}$  et  $\frac{2\pi}{3}$ .

Ainsi, la fonction  $f$  atteint donc sur  $K$  son maximum 1 aux points  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$  et son minimum  $-1$  aux points  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$ .

1.3.2 EXEMPLE. Etude des extrema de  $f(x, y) = xy$  sur le carré  $K = [0, 2] \times [0, 1]$ .

(i) On cherche les points critiques et les extrema locaux dans l'intérieur  $\overset{\circ}{K} = ]0, 2[ \times ]0, 1[$ , mais  $(0, 0) \notin \overset{\circ}{K}$ ; donc  $f$ , n'a pas de points dans  $\overset{\circ}{K}$ , par suite n'y a pas d'extremum.

(ii) On analyse  $f$  sur le bord  $\partial K = K \setminus \overset{\circ}{K}$ , qui est la réunion de quatre segments :

$$\partial K = [0, 2] \times \{0\} \cup \{2\} \times [0, 1] \cup [0, 2] \times \{1\} \cup \{0\} \times [0, 1].$$

- 1) sur  $[0, 2] \times \{0\}$  on a  $f(x, 0) = 0$ , qui est constante, donc son minimum est égal à son maximum et vaut 0.
- 2) sur  $\{2\} \times [0, 1]$  on a  $f(2, y) = 2y$ , son minimum est égal 0 et son maximum est égal à 2.
- 3) sur  $[0, 2] \times \{1\}$  on a  $f(x, 1) = x$ , son minimum est égal 0 et son maximum est égal à 2.
- 4) sur  $\{0\} \times [0, 1]$  on a  $f(0, y) = 0$ , qui est constante, donc son minimum est égal à son maximum et vaut 0.

Ainsi, la fonction  $f$  atteint donc sur  $K = [0, 2] \times [0, 1]$ , son maximum 2 aux points  $(2, 1)$  et son minimum 0 aux points  $(x, y) \in [0, 2] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0, 1]$ .

### 1.3.2 Extrema sous une seule contrainte

Soit  $n \geq 1$  un entier. On notera par  $X = (x_1, \dots, x_n)$  un point de  $\mathbb{R}^n$ .

Il s'agit de trouver les extrema de  $f(X)$  lorsque  $X$  appartient à une hypersurface  $S$  définie par  $g(X) = 0$  i.e.  $S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid g(X) = 0\}$ .

#### 1.3.3 DÉFINITION

Un point  $X_0$  est un *minimum* (resp. *maximum*) local pour  $f$ , lié à la contrainte  $g(X) = 0$  (i.e. sur  $S$ ) si :

- (i)  $g(X_0) = 0$
- (ii) Il existe  $r > 0$  tel que  $f(X_0) \leq f(X)$  (resp.  $f(X_0) \geq f(X)$ ) pour tout  $X \in S \cap B(X_0, r)$ .

#### 1.3.4 THÉORÈME ( DE LAGRANGE)

Soit  $f(X)$  et  $g(X)$  de classe  $C^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $X_0$  un point de  $S$  tel que :

- (a)  $\nabla g(X_0) \neq \mathbf{0}$  ( i.e.  $X_0$  n'est pas un point critique de  $g$ )
- (b)  $f$  admet un *extremum local* en  $X_0$  sur  $S$

Alors il existe un nombre réel  $\lambda$  tel que :

$$\nabla f(X_0) = \lambda \nabla g(X_0).$$

Le nombre réel  $\lambda$  est appelé multiplicateur de Lagrange.

*Démonstration:* On va démontrer le théorème pour la dimension  $n = 3$ . La démonstration dans le cas général, se fait suivant le même schéma.

Soit  $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$  vérifiant les conditions (a) et (b).

D'après (a), on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.

En effet,  $\nabla g(X_0) \neq (0, 0, 0)$ , entraîne que l'une des composantes de  $\nabla g(X_0)$

est non nulle; on va supposer sans perdre de généralité que  $\frac{\partial g}{\partial z}(X_0) \neq 0$ .

Alors d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction  $\varphi$  définie dans un voisinage de  $(x_0, y_0)$ , telle que  $z = \varphi(x, y)$ . On aura  $(x, y, z) \in S \iff g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$  au voisinage de  $X_0$ .

Comme la fonction  $h(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$  admet un extremum en  $(x_0, y_0)$ , on a  $\nabla h(x_0, y_0) = 0$ , en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, on aura au point  $X_0$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(X_0) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(X_0) = 0$$

De même les dérivées partielles de la relation  $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$  donnent

$$\frac{\partial g}{\partial x}(X_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial z}(X_0) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(X_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial z}(X_0) = 0$$

Comme  $\frac{\partial g}{\partial z}(X_0) \neq 0$ , on peut diviser par cette quantité pour obtenir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)}.$$

D'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \left( \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)} \right) \frac{\partial f}{\partial z}(X_0) = \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial z}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)} \right) \frac{\partial g}{\partial x}(X_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = \left( \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)} \right) \frac{\partial f}{\partial z}(X_0) = \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial z}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)} \right) \frac{\partial g}{\partial y}(X_0)$$

$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial z}(X_0) = \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial z}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)} \right) \frac{\partial g}{\partial z}(X_0).$$

Ainsi, on a bien  $\nabla f(X_0) = \lambda \nabla g(X_0)$  avec  $\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)}$ .  $\square$

### 1.3.6 REMARQUE

Si  $P$  est un extremum lié, on a  $\nabla f(P)$  parallèle à  $\nabla g(P)$ . La réciproque n'est pas vraie. Nous avons une condition nécessaire mais pas suffisante. C'est l'équivalent de la nullité de la dérivée pour les extrema libres : en un extremum libre la dérivée est nulle mais la dérivée peut être nulle sans que la fonction ait un extremum (penser à  $x \mapsto x^3$  en  $x = 0$ ).

1.3.7 **EXEMPLE.** Déterminer les extrema de  $f(x, y) = xy$  sur le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 8$ .

Le cercle étant un compact de  $\mathbb{R}^2$  et  $f$  une fonction continue, les théorèmes généraux nous garantissent l'existence d'un maximum et un minimum de la restriction de  $f$  au cercle.

On pose  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 8$ . Alors,  $\nabla f(x, y) = (y, x)$ ,  $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ .

Pour déterminer les points critiques de  $f(x, y)$  restreinte à la condition  $g(x, y) = 0$  en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

On observera, que ce système impose que les solutions  $(x, y)$  vérifient  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$ , en effet, si par exemple  $x = 0$ , alors la première équation entraîne que  $y = 0$ , mais ceci est impossible puisque le point  $(0, 0)$  n'est pas sur le cercle. Par suite  $\lambda \neq 0$ . La division membre à membre des deux premières équations donne  $\frac{y}{x} = \frac{x}{y} \implies y^2 = x^2$ . Comme  $x^2 + y^2 = 8$ , on aura  $x^2 + x^2 = 8 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$ . De même on trouve  $y = \pm 2$ . L'ensemble des points critiques de la restriction de  $f$  à  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ , est

$$\{(-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2)\}.$$

Il ne reste plus qu'à comparer les valeurs de  $f$  en ces points :

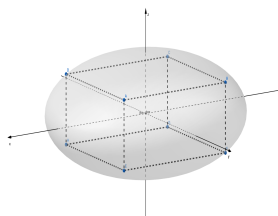
$(x, y)$	$(-2, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, -2)$	$(2, 2)$
$f(x, y)$	4	-4	-4	4
nature du point	maximum global	minimum global	minimum global	maximum global

1.3.8 **Exercice** Maximiser  $x^2 y^2 z^2$  lorsque  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

1.3.9 **EXEMPLE.** On se propose de déterminer le parallélépipède ayant le plus grand volume, qu'on peut inscrire à l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation

$$x^2 + 2y^2 + 9z^2 = 1,$$

dont les côtés  $a, b$  et  $c$  soient parallèles aux axes  $Ox, Oy$  et  $Oz$  respectivement.



On pose  $a = 2x$ ,  $b = 2y$  et  $c = 2z$  avec  $(x, y, z) \in ([0, +\infty[)^3$ . On veut alors maximiser la fonction "volume"  $f(x, y, z) = abc = (2x)(2y)(2z) = 8xyz$  sur la partie de l'ellipsoïde  $S = \{(x, y, z) \in ([0, +\infty[)^3 \mid x^2 + 2y^2 + 9z^2 = 1\}$ . On va utiliser pour cela la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

On va résoudre alors le système

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = (8yz, 8xz, 8xy) = \lambda \nabla g(x, y, z) = \lambda(2x, 4y, 19z) \\ x^2 + 2y^2 + 9z^2 = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} 8yz = \lambda 2x \\ 8xz = \lambda 4y \\ 8xy = \lambda 18z \\ x^2 + 2y^2 + 9z^2 = 1. \end{cases}$$

Considérant les deux cas,  $\lambda = 0$  ou  $\lambda \neq 0$ . Si  $\lambda = 0$  alors au moins deux des coordonnées  $x, y$  et  $z$  sont nulles, d'où le volume est nulle, c'est un minimum, mais pas un maximum. On doit donc supposer  $\lambda \neq 0$  et toutes les coordonnées non nulles. On peut donc considérer les quotients; on a :

$$\frac{8yz}{8xz} = \frac{y}{x} = \frac{2\lambda x}{4\lambda y} = \frac{x}{2y}, \quad \frac{8yz}{8xy} = \frac{z}{x} = \frac{2\lambda x}{18\lambda z} = \frac{x}{9z}$$

D'où  $2y^2 = 9z^2 = x^2$  et la contrainte  $x^2 + 2y^2 + 9z^2 = 1$ , donne alors  $x^2 + x^2 + x^2 = 1$  i.e.  $3x^2 = 1$ . Comme  $x$  est positif, l'unique solution à retenir est  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , par suite  $y = \frac{1}{\sqrt{6}}$  et  $z = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ .

Ainsi, le parallélépipède est de côtes,  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$  et  $c = \frac{2}{3\sqrt{3}}$   
 et le volume maximal est  $abc = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{9\sqrt{6}}$ .

### 1.3.3 Généralisation à plusieurs contraintes :

On cherche les extrema d'une fonction  $f$  sur l'ensemble  $S$  défini par  $g_1 = g_2 = \dots = g_k = 0$ , toutes les fonctions considérées étant de classe  $C^1$ . Pour que les choses marchent il faut généraliser l'hypothèse avec une seule

contrainte. On fait rajouter la condition : que les gradients des fonctions  $g_1 = g_2 = \dots = g_k$  soient linéairement indépendants.

### 1.3.10 THÉORÈME (MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE)

Soient  $f$  et  $g_1, \dots, g_k, k + 1$  fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telles que les vecteurs  $\nabla g_1, \dots, \nabla g_k$ , soit linéairement indépendants sur l'ensemble  $S$  défini par

$$g_1(X) = \dots = g_k(X) = 0.$$

Alors si  $f$  admet un extremum lié sur  $S$  en  $X_0$  le vecteur,  $\nabla f(X_0)$  est combinaison linéaire des vecteurs  $\nabla g_i(X_0)$  i.e. il existe des nombres réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tels que

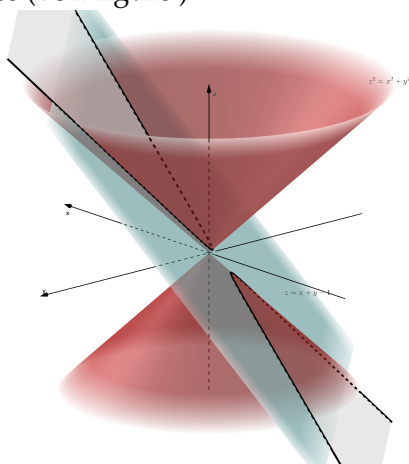
$$\nabla f(X_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(X_0).$$

Les nombres réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sont appelés *des multiplicateurs de Lagrange*.

**1.3.11 Exercice** Déterminer les extrema de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  sous les contraintes  $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$  et  $g_2(x, y, z) = x + y - z + 1 = 0$ .

### 1.3.12 REMARQUE

$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$  est l'équation d'un cône (double) et  $g_2(x, y, z) = x + y - z + 1 = 0$  est celle d'un plan, alors  $g_2(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$  est l'intersection de ce cône avec ce plan, dans ce cas on obtient une hyperbole dans l'espace (voir figure)



$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = \|(x, y, z)\|^2$  est le carré de la distance de  $(x, y, z)$  à l'origine  $(0, 0, 0)$ . Comme l'hyperbole à des points de norme arbitrairement grande,  $f$  n'aura pas de maximum, par contre elle atteindra son minimum sur l'hyperbole  $S = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0\}$ .

On va utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On va résoudre le système

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g_1(x, y, z) + \mu \nabla g_2(x, y, z) \\ z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x + y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x, 2y, 2z) = \lambda(2x, 2y, -2) + \mu(1, 1, -1) = (2\lambda x + \mu, 2\lambda y + \mu, -2\lambda z - \mu) \\ z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x + y + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x + \mu \\ 2y = 2\lambda y + \mu \\ 2z = -2\lambda z - \mu \\ z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1 - \lambda) = \mu \\ 2y(1 - \lambda) = \mu \\ 2z(1 + \lambda) = -\mu \\ z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x + y + 1 \end{cases}$$

On va maintenant, déterminer les solutions de ce système.

Si  $\lambda = 1$ , alors  $\mu = 0$  et comme  $1 + \lambda = 2$  la troisième équation donne nécessairement  $z = 0$ , puis la quatrième équation donne  $x^2 + y^2 = 0$ , donc  $x = y = z = 0$ , mais  $(0, 0, 0)$  n'est pas solution de la cinquième équation  $x + y - z + 1 = 0$ , alors on ne retient pas ce point.

De même, si  $\lambda \neq 1$  et  $\mu = 0$ , on trouve l'unique solution  $(0, 0, 0)$ , qu'on ne retient pas.

Supposons maintenant, que  $\lambda \neq 1$ , alors  $\mu \neq 0$ . En prenant le quotient de  $2x(1 - \lambda) = \mu$  par  $2y(1 - \lambda) = \mu$  on obtient  $\frac{x}{y} = 1$ , d'où  $\boxed{y = x}$ , alors  $z^2 = x^2 + y^2$ , nous donne  $z^2 = 2x^2 \implies \boxed{z = \pm\sqrt{2}x}$ .

- si  $\boxed{z = \sqrt{2}x}$ ,  $x + y - z + 1 = 0 \implies x + x - \sqrt{2}x + 1 = 0 \implies (2 - \sqrt{2})x = 1$ , d'où  $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$  par suite la solution est

$$(x, y, z) = \boxed{\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2} - 1\right)}$$

- si  $\boxed{z = -\sqrt{2}x}$ ,  $x + y - z + 1 = 0 \implies x + x + \sqrt{2}x + 1 = 0 \implies (2 + \sqrt{2})x = -1$ , d'où  $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$  par suite la solution est

$$(x, y, z) = \boxed{\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} - 1\right)}$$

On va maintenant comparer les valeurs de  $f$  en ces points pour déterminer le minimum de  $f$  sur  $S$ . On a

$$\begin{aligned} f\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \sqrt{2}\right) &= \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (-1 - \sqrt{2})^2 \\ &= \left(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) + (1 + 2\sqrt{2} + 2) = 6 + 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \sqrt{2}\right) &= \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (-1 + \sqrt{2})^2 \\ &= \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) + (1 - 2\sqrt{2} + 2) = 6 - 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

La plus petite valeur étant  $6 - 4\sqrt{2}$ ,  $f$  atteint un minimum global sur  $S$  au point  $\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \sqrt{2}\right)$ .

### 1.3.13 REMARQUE

En fait, on a montré que  $\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \sqrt{2}\right)$  est l'unique point de l'hyperbole qui est le plus proche de l'origine  $(0, 0, 0)$ .

**Deuxième partie**

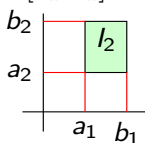
**Intégrales multiples**

1. Rappels sur l'intégrale de fonctions d'une variable réelle (Intégrale de Riemann)
2. Intégrales doubles
3. Intégrales triples
4. Applications : Calculs d'aire, de volume, moyenne, centre de gravité et moment d'inertie

## 1.4 Une introduction à la mesure

### 1.4.1 Mesure des figures canoniques

- Si  $l_1 = [a_1, b_1]$  ( un segment), avec  $-\infty < a_1 \leq b_1 < \infty$ , alors sa longueur  $\lambda_1(l_1) = b_1 - a_1$ .
- Si  $l_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  (un rectangle)



alors son aire  $\lambda_2(l_2) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2)$ .

- Plus généralement, si  $d$  est un entier  $\geq 3$  et

$$l_d = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$$

avec  $a_i \leq b_i$  pour tout  $i$  (un parallélépipède en dimension  $d$ ),

- alors son volume ( en dimension  $d$ ) est égal à :

$$\lambda_d(l_d) := \prod_{i=1}^d (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_d - a_d).$$

#### Remarques

- les points ont une longueur nulle :
- en effet  $\{a_1\} = [a_1, a_1]$ , par suite  $\lambda_1(\{a_1\}) = a_1 - a_1 = 0$
- Par conséquent :  $\lambda_1([a, b[) = \lambda_1(]a, b]) = \lambda_1(]a, b]) = \lambda_1([a, b]) = b - a$ .
- tout segment de droite a une aire nulle car

$$\lambda_2(\{a_1\} \times [a_2, b_2]) = 0 \times (b_2 - a_2) = 0.$$

- Plus généralement, les parallélépipèdes ( ou pavés droits) de  $\mathbb{R}^{d-1}$  ont un volume nul pour la mesure de  $\mathbb{R}^d$ .

- Une **figure élémentaire**  $J$  est une réunion finie de parallélépipèdes canoniques disjoints  $J_1, J_2, \dots, J_n$  de  $\mathbb{R}^d$ .  
(ou les intersections sont de dimension  $\leq d - 1$ )
- Additivité disjointe :

$$J = \bigsqcup_{i=1}^n J_i \Rightarrow \lambda_d(J) = \lambda_d(J_1) + \dots + \lambda_d(J_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_d(J_i).$$

Le symbole  $\bigsqcup$  désigne une réunion disjointe c-à-d une union d'ensembles deux à deux disjoints.

- Invariance par translations :

$$\text{pour tout vecteur } v \in \mathbb{R}^d, \quad \lambda_d(J + v) = \lambda_d(J).$$

- Plus généralement : Invariance par isométrie : Soit  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  une isométrie (application qui préserve les distances) alors

$$\lambda_d(h(J)) = \lambda_d(J).$$

- Utiliser les règles précédentes pour se ramener à des figures élémentaires.
- Exemple : le calcul de l'aire d'un triangle de base  $b$  et de hauteur  $h$

$$\lambda_2(\triangle) = \frac{1}{2} \lambda_2(\text{rectangle}) = \frac{1}{2} \lambda_2(\text{rectangle}) = \frac{1}{2} \lambda_2(\text{rectangle})$$

$$\lambda_2\left(\triangle\right) = \frac{1}{2} b \times h.$$

### 1.4.2 Le problème de la mesure

- Pour des figures encore plus compliquées, la règle d'additivité doit être étendue en additivité dénombrable disjointe (ou  $\sigma$ -additivité) :

$$J = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} J_n \Rightarrow \lambda_d(J) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(J_n).$$

- Idée : approcher une figure arbitraire par des réunions dénombrables de figures plus simples dont on sait calculer le volume.

- Exemple : le calcul du périmètre et l'aire d'un disque à l'aide de polygones réguliers.  
Le problème suivant concerne le lien entre découpage et mesure (de l'aire ou du volume).
- On appelle **isométrie** est une transformation qui conserve les longueurs ( les aires, les volumes). Par exemples, les translations, les rotations et les symétries sont des isométries.

#### 1.4.1 DÉFINITION

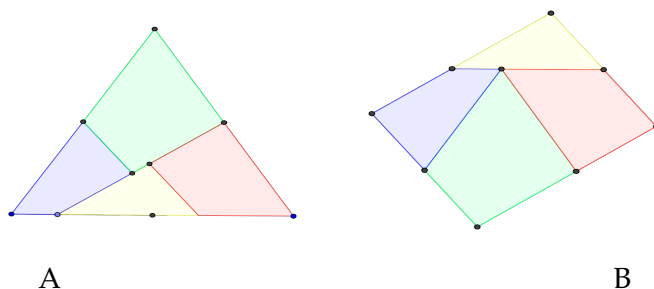
- Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}^d$ . On dit qu'elles sont équivalentes par découpage et recollement (ou équivalentes par puzzle) s'il existe une partition finie de  $A$  (resp. de  $B$ ),

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \text{ ( resp. } B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n)$$

et, pour chaque  $i = 1, 2, \dots, n$ , une isométrie  $g_i$  telle que

$$g_i(A_i) = B_i$$

Autrement dit, on a découpé  $A$  en  $n$  morceaux  $A_1, \dots, A_n$ , on a déplacé ces morceaux et on les a recollé pour reconstituer  $B$ , le tout, bien entendu, sans perte ni chevauchement



**Question :** Il est facile de voir que deux parties équivalentes par découpage et recollement ont même aire (dans le plan) ou même volume (dans l'espace). La question qui se pose est celle de la réciproque : si deux parties du plan ont même aire, peut-on passer de l'une à l'autre par découpage et recollement ? (Ou encore : existe-t-il un puzzle passant de l'une à l'autre ?)

La question est identique pour deux parties de même volume dans l'espace.

Les réponses sont différentes entre le plan et l'espace.

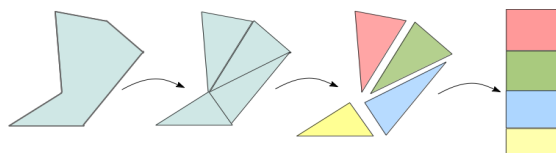
Deux parties du plan, de même aire, sont équivalentes par découpage et recollement :

### 1.4.2 THÉORÈME

Théorème[Bolyai, 1832, Gerwien, 1833] Soient  $A$  et  $B$  deux polygones du plan qui ont une même aire.

Alors  $A$  et  $B$  sont équivalents par découpage et recollement.

Idée de la preuve : On découpe  $A$  en triangles  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . On montre ensuite que chaque triangle  $T_i$  est équivalent à un rectangle  $R_i$  de même aire et dont un côté est de longueur 1. On obtient alors un rectangle  $R$  équivalent à  $A$  en mettant bout à bout tous les  $R_i$ . On fait de même pour montrer que  $B$  est équivalent à  $R$ .



- Le résultat est faux dans l'espace. On montre que le cube unité n'est pas équivalent par découpage et recollement au tétraèdre régulier (de volume 1).

**Le problème de la mesure :**

Existe-t-il une application non-nulle  $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, +\infty]$ , où  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  désigne l'ensemble des parties de  $\mathbb{R}^d$ , telle que :

1.  $m(\emptyset) = 0$ , où  $\emptyset$  est l'ensemble vide
  2.  $m\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} J_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(J_n)$ , où, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $J_n$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^d$
  3.  $m$  est invariante par isométrie
  4.  $m([0, 1]^d) = 1$
- une telle application est appelée mesure universelle ( elle permet de mesurer toute partie de  $\mathbb{R}^d$  )
  - Question : existe-t-il dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  une mesure universelle (définie pour toutes les parties bornées), non nulle, simplement additive et invariante par isométries ?
  - La réponse est non et cela est une conséquence de ce qu'on appelle le paradoxe de Banach-Tarski :

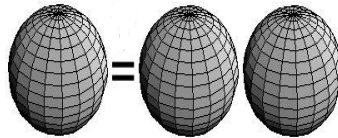
### 1.4.3 THÉORÈME (BANACH-TARSKI, (1924))

Soient  $A$  et  $B$  deux parties bornées d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^3$ . Alors, il existe des partitions finies de

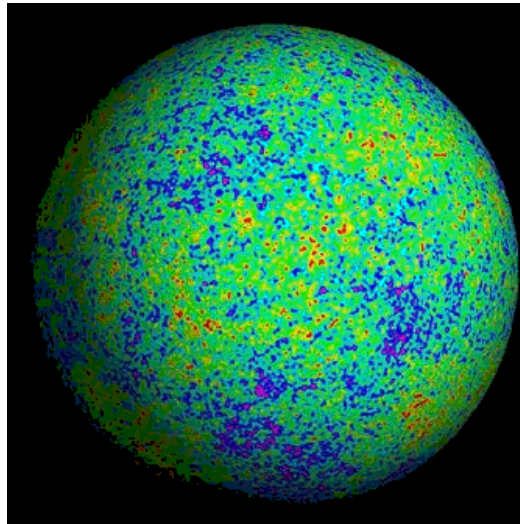
$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  et  $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$   
 et pour chaque  $i = 1, 2, \dots, n$ , une isométrie  $g_i$  telle que

$$g_i(A_i) = B_i$$

- 
- Autrement dit, on peut découper  $A$  en un nombre fini de morceaux (certainement pas simples!), les déplacer, et reconstituer  $B$  avec ces morceaux (un puzzle).
  - On pensera par exemple au cas suivant :  $A$  est une pomme et  $B$  est la lune.
  - On montre même que pour passer d'une boule de rayon donnée à deux boules disjointes de même rayon, il suffit d'un découpage en 5 morceaux. On peut par exemple dédoubler la terre en la découpant en 5 parties puis en les rassemblant.



- Il y a certainement dans cette partition des morceaux qu'on ne peut pas mesurer, sinon le volume de la terre serait égal à son double ce qui donne  $1 = 2$  et cela est absurde.
- à noter que ces découpages ne sont pas réguliers; un tel découpage ressemblerait un peu à ceci (les éléments d'une même couleur forment une pièce du Puzzle)



## Chapitre 2

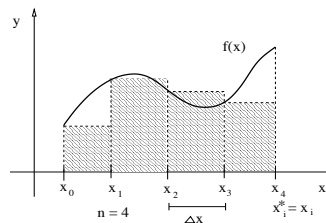
# Rappels sur l'intégrale de Riemann

### 2.0.1 DÉFINITION (DÉFINITION DE L'INTÉGRALE)

- Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.  
On appelle somme de Riemann associée à  $f$ ,  $n$  et  $x_i^*$ , la somme

- $$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)$$

où  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_i = a + i\Delta x$  et  $x_i^*$  est un point quelconque de  $[x_{i-1}, x_i]$

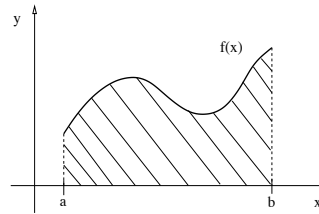


### 2.0.2 THÉORÈME

Si  $f$  est continue, alors la suite  $(S_n)$  converge ( indépendamment du choix des  $x_i^*$ ). On appelle intégrale ( au sens de Riemann) de  $f$  sur  $[a, b]$ , la limite de cette suite, et on note

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

L'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  est l'aire du domaine délimité par le graphe de  $f$  et l'axe des abscisses.



### 2.0.3 REMARQUE

Cette définition est valable aussi pour les fonctions continues par morceaux sur  $[a, b]$  c'est-à-dire les fonctions continues sauf en un nombre fini de points où elle admettent des limites à droite et à gauche.

Ce qui suit donne la définition (générale) des fonctions intégrable au sens de Riemann, qui inclus un plus grand nombre de fonctions, par exemple les fonctions monotones sur  $[a, b]$ .

- En utilisant la définition, on va calculer  $\int_0^1 x dx$
- Dans ce cas, on a :

$$a = 0, b = 1, f(x) = x, \Delta x = \frac{1}{n} \text{ et on prend } x_i^* = x_i = \frac{i}{n} \text{ alors}$$

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

- D'où,  $\int_0^1 x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$ .

### 2.0.4 REMARQUE

- On a utiliser le résultat suivant : pour tout entier naturel  $m$  on a

$$\boxed{\sum_{k=1}^m k := 1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}} \quad \text{à démontrer en exercice!}$$

Plus généralement

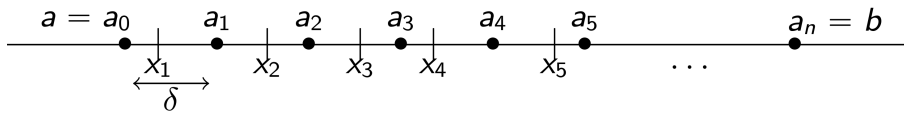
### 2.0.5 DÉFINITION

On appelle **subdivision** d'un intervalle réel  $[a, b]$  toute famille finie  $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$  d'éléments du segment  $[a, b]$  telle que :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

On appelle **pas** (ou diamètre) de la subdivision  $\sigma$  le réel positif

$$\delta = \max_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$$

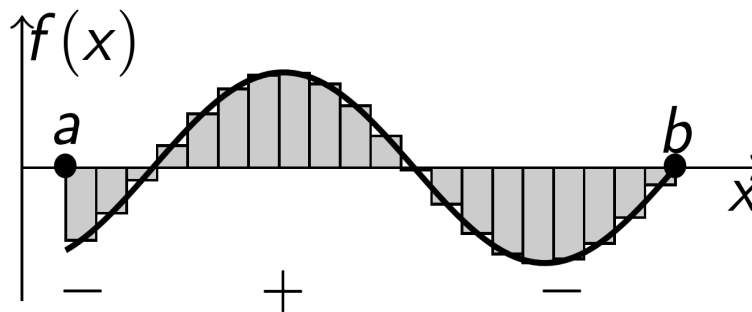
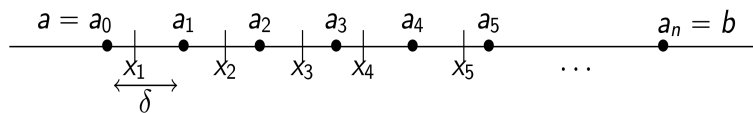


## 2.0.6 DÉFINITION

Définition des sommes de Riemann

- Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction d'une variable,  $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$  une subdivision de  $[a, b]$  et des points  $x_1, \dots, x_n$  tels que  $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$  :
- La somme de Riemann de  $f$  associée à la subdivision  $\sigma$  et aux points  $x_1, \dots, x_n$  est la somme (finie)

$$S(f, \delta, x_i) := \sum_{i=1}^n f(x_i)(a_i - a_{i-1})$$



## 2.0.7 DÉFINITION

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est intégrable (au sens de Riemann) si

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty}} S(f, \sigma, x_i)$$

existe, est finie et ne dépend pas du choix des  $x_i$ . Dans ce cas

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty}} S(f, \sigma, x_i)$$

## 2.0.8 THÉORÈME

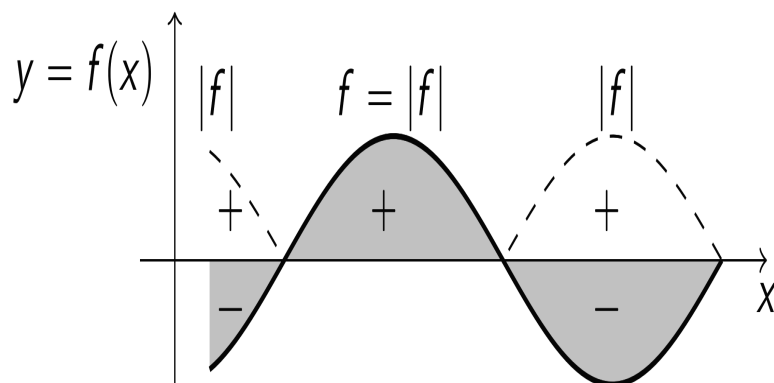
Les fonctions continues par morceaux, en particulier les fonctions continues, sont des fonctions intégrables. Les fonctions monotones sont des fonctions intégrables.

## 2.0.9 REMARQUE

La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  n'est pas intégrable au sens de Riemann.

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Aire algébrique}$$

$$\int_a^b |f(x)| dx = \text{Aire géométrique}$$



## 2.1 Techniques de calcul

1. Une **primitive** de  $f$  sur  $[a, b]$  est une fonction  $F$  dérivable telle

$$F'(x) = f(x)$$

2. pour calculer une intégrable il suffit de connaître une primitive

## 2.1.1 THÉORÈME (FONDAMENTAL DU CALCUL INTÉGRAL)

Si  $F$  est une **primitive** de  $f$  sur  $[a, b]$  alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

- "Lu à l'envers", un tableau de dérivées est un tableau de primitives (à une constante près).
- Le calcul d'une primitive consiste souvent après quelques transformations à "reconnaître" une des fonctions du tableau :

Définie sur I	f	$F(x) = \int f(x)dx$
$\mathbb{R} - \{0\}$ ou $\mathbb{R}^+ - \{0\}$	$x^\alpha, (\alpha < 0 \text{ et } \alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+ - \{0\}$	$x^\alpha, (\alpha \geq 0)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\mathbb{R} - \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\ln( x )$
$\mathbb{R} - \{-a\}$	$\frac{1}{x+a}$	$\ln( x+a )$
$\mathbb{R}$	$e^{ax}, (a \neq 0)$	$\frac{e^{ax}}{a}$

Définie sur I	f	$F(x) = \int f(x)dx$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(ax+b), (a \neq 0)$	$-\frac{\cos(ax+b)}{a}$
$\mathbb{R}$	$\cos(ax+b), (a \neq 0)$	$\frac{\sin(ax+b)}{a}$
$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\tan(x)$	$-\ln( \cos(x) )$
$\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\cotan(x)$	$\ln( \sin(x) )$

Définie sur I	f	$F(x) = \int f(x)dx$
$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$
$\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \cotan^2(x)$	$-\cotan(x)$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$] -1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$] -1, 1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$

$f$	$F(x) = \int f(x)dx$
$\frac{u'}{u^m}, m \neq 1$	$\frac{-1}{(m-1)u^{m-1}}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln  u $
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u' \cos u$	$\sin u$
$u' \sin u$	$-\cos u$

### Intégration par parties

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$ ,  
De la règle de dérivation d'un produit

$$(fg)' = f'g + fg' \iff fg' = (fg)' - f'g$$

En intégrant, de part et d'autres de cette égalité, on obtient

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx$$

nous déduisons la formule d'intégration par parties

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

on a aussi  $\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$

#### 2.1.2 EXEMPLE. Exemple

Soit à calculer  $\int \ln(x) dx$ .

$$\text{En posant } \begin{cases} f(x) = \ln(x) & \implies f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & \implies g(x) = x \end{cases}$$

on obtient  $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x + C$   
où  $C$  est une constante.

#### 2.1.3 EXEMPLE. Exemple d'intégration par parties successives

Soit à calculer  $\int \sin(x)e^x dx$ .

$$\text{En posant } \begin{cases} f(x) = \sin(x) & \implies f'(x) = \cos(x) \\ g'(x) = e^x & \implies g(x) = e^x \end{cases}$$

on obtient  $\int \sin(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx$ .

Ce n'est pas fini : il nous reste à calculer une primitive de  $\cos(x)e^x$ , on utilise pour cela encore une intégration par parties.

$$\text{En posant } \begin{cases} u(x) = \cos(x) & \implies u'(x) = -\sin(x) \\ v'(x) = e^x & \implies v(x) = e^x \end{cases}$$

on obtient  $\int \cos(x)e^x dx = \cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x dx$ .

Ainsi,  $\int \sin(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \sin(x)e^x dx$ ,

par suite  $2 \int \sin(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x$  d'où

$$\boxed{\int \sin(x)e^x dx = \frac{\sin(x)e^x - \cos(x)e^x}{2} = \frac{e^x(\sin(x) - \cos(x))}{2}.}$$

#### 2.1.4 EXEMPLE. Exemples

— Calculer  $\int_0^\pi t \sin(t) dt$

— Faisons une intégration par parties en posant  $u = t$  et  $v' = \sin t$ , d'où  $u' = 1$  et  $v = -\cos t$ . Ainsi,

$$\int_0^\pi t \sin t dt = [-t \cos t]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t dt = -\pi \cos(\pi) + [\sin t]_0^\pi = -\pi \cos(\pi) = \pi.$$

### 1) Changement de variable

— (Intégration par changement de variable)  $x = u(t)$  alors

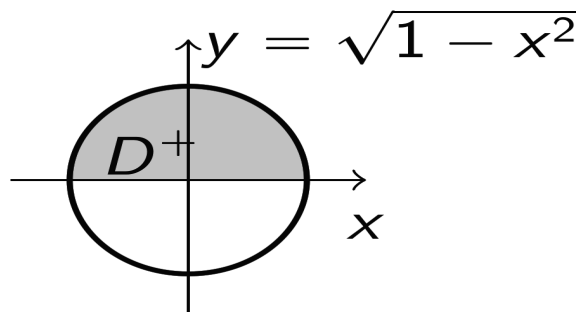
$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(u(t)) u'(t) dt}$$

où  $u : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$  telle que  $u(c) = a$  et  $u(d) = b$ .

#### 2.1.5 REMARQUE

- La méthode d'intégration par changement de variable n'a d'autre but que de remplacer une intégrale compliquée par une intégrale plus simple.
- La difficulté majeure consiste à trouver le changement de variable qui convient. Il faut essayer de choisir  $u$  égal à une certaine fonction qui apparaît sous le signe d'intégration et dont la dérivée s'y trouve aussi à un facteur constant près.

2.1.6 EXEMPLE. Calcul de l'aire du disque unité.



Aire du demi-disque  $D^+$  est égale à l'intégrale de la fonction  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

$$\text{— Aire } (D) = 2\text{Aire } (D^+) = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

— On va utiliser pour cela le changement de variable :  $x = \sin t$  pour  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

— Alors  $dx = \cos t dt$  et puisque  $\sqrt{1 - x^2} = \cos t$  on aura

$$\text{Aire } (D) = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt$$

$$= \left[ \frac{1}{2} \sin(2t) + t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left( 0 + \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2} \right) = \pi.$$

## Chapitre 3

# Intégrales doubles

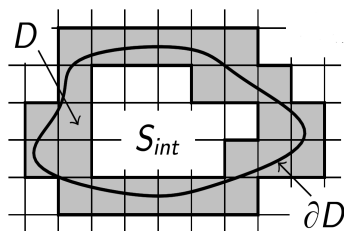
Soit  $D$  un domaine compact de  $\mathbb{R}^2$  à bord  $\partial D$ , qui est une courbe  $C$  paramétrée par des applications injectives de classe  $C^1$  (ou une réunion finie de telles courbes.)

On appellera un tel domaine, un domaine régulier (ou à bord régulier). Le problème de la restriction (à ce type de domaine), ne se posait pas pour la dimension 1 puisqu'on y intégrait des fonctions définies sur des intervalles.

Soit  $f(x, y)$  une fonction à deux variables sur un domaine régulier  $D$ . Supposons que  $f$  soit continue sur  $D$  (avec son bord  $\partial D = C$ ).

On va maintenant définir l'intégrale de  $f$  sur le domaine  $D$ , on va procéder comme en dimension 1, par "découpage et échantillonnage".

Comme  $D$  est borné on peut l'inclure dans un rectangle  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Maintenant, pour tout  $n$  entier  $\geq 1$ , on divise  $R$  en petits rectangles  $R_{ij}$  de taille  $\frac{b-a}{n} \times \frac{d-c}{n}$  parallèles aux axes  $Ox$  et  $Oy$  et on ne considère que les rectangles  $R_{i,j}$  contenus dans  $D$  (sur la figure  $S_{int}$  est l'ensemble des rectangles contenus dans  $D$ )



Notons  $M_{i,j}$  un point de  $R_{i,j}$ . Considérons la somme Riemann (double)

(sur les indices  $(i, j)$  tels que  $R_{ij}$  soit contenu dans  $D$ )

$$S_n(f) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{R_{ij} \subset D} f(M_{i,j}).$$

Notons que  $\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$  est l'aire du rectangle  $R_{i,j}$ .

### 3.0.1 DÉFINITION

On dit qu'une fonction est intégrable si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  existe.

On appelle l'intégrale double de la fonction  $f$  sur le domaine  $D$  cette limite, et on la note

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

---

Nous admettrons le résultat suivant :

### 3.0.2 THÉORÈME

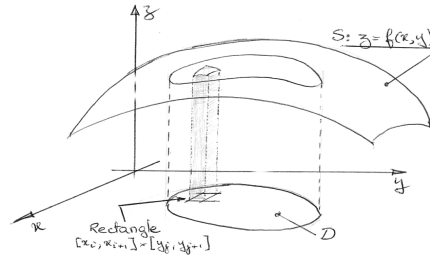
Toute fonction continue  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sur un domaine compact  $D$  est intégrable.

---

### 3.0.3 REMARQUE

Cette définition est valable pour une fonction différentiable sur ce domaine, puisqu'elle est alors continue.

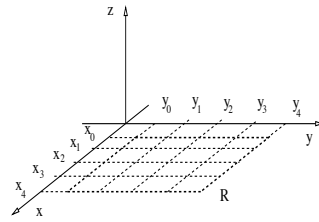
**Interprétation géométrique :** Supposons que la fonction  $f$  soit positive. Notons  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y) \text{ et } (x, y) \in D\}$  le graphe de  $f$  au-dessus de  $D$ . Cette surface et les parallèles à  $Oz$  menées par les points du bord  $\partial D$  limitent un domaine  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$ . L'intégrale  $I$  est le volume de ce domaine. En effet, le volume limité dans  $\Omega$  par le rectangle  $R_{i,j}$  et les plans parallèles à  $Oz$  qui s'appuient sur son périmètre à pour valeur approchée  $f(M_{i,j}) \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$ . La somme  $\frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{R_{ij} \subset D} f(M_{i,j})$  représente une valeur approchée du volume de  $\Omega$ . La limite  $I$  est le volume exacte de  $\Omega$ .



**Le cas où  $D$  est un rectangle :** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur le rectangle  $D = R = [a, b] \times [c, d]$ . Dans ce cas utilise tous les rectangles du découpage c-à-d tous les indices  $(i, j)$ , donc  $0 \leq i \leq n$  et  $0 \leq j \leq n$ . D'après ce qui précède, l'intégrale de  $f$  (au sens de Riemann) est la limite des  $S_n(f)$  :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(M_{i,j}) \Delta x \Delta y$$

où  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ,  $\Delta y = \frac{d-c}{n}$ ,  
 $x_i = a + i\Delta x$  ( $0 \leq i \leq n$ ),  
 $y_j = c + j\Delta y$  ( $0 \leq j \leq n$ )  
 $M_{i,j} = (x_i, y_j)$



d'où

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} f\left(a + i \frac{b-a}{n}, c + j \frac{d-c}{n}\right)$$

**3.0.4 EXEMPLE.** En utilisant la définition, on va calculer  $\iint_{[0,1] \times [0,1]} (2x + y) dx dy$ .

Dans ce cas, on a  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $a = c = 0$ ,  $b = d = 1$ ,  $f(x, y) = 2x + y$ , alors

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{2i}{n} + \frac{j}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{j=1}^n j\right) = \frac{1}{n^2} \left(n(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{3n+1}{2n} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{2n} = \frac{3}{2}.$$

## 3.0.5 REMARQUE

On a utiliser pour faire les calculs, le fait suivant : pour tout entier naturel  $m$  on a

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$$

## 3.0.1 Propriétés des intégrales doubles :

Soient  $D$  un domaine (fermé et borné) de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues alors :

1.  $\iint_D cf(x,y)dxdy = c \iint_D f(x,y)dxdy$  pour tout réel  $c$ .
2.  $\iint_D (f(x,y) + g(x,y)) dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$
3. Si  $D = D_1 \cup D_2$  et l'aire de  $D_1 \cap D_2$  est nulle, alors

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

4. Si  $f(x,y) \geq g(x,y)$  pour tout  $(x,y) \in D$  alors

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D g(x,y)dxdy.$$

En particulier, si  $f \geq 0$  pour tout  $(x,y) \in D$  alors  $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$ .

5.  $|\iint_D f(x,y)dxdy| \leq \iint_D |f(x,y)| dxdy$ .
6. **Calcul d'aire :** L'aire de  $D$  est l'intégrale double sur  $D$  de la fonction constante égale à 1

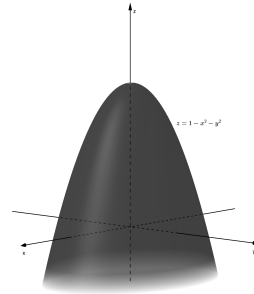
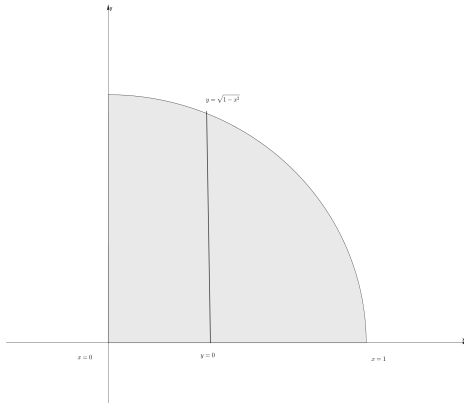
$$\text{Aire de } D = \iint_D dxdy$$

## 3.0.2 Comment calculer une intégrale double ?

La définition de la suite des sommes de Riemann, ne permet de calculer facilement l'intégrale double en général. Nous allons voir que pour calculer l'intégrale on va se ramener au calcul de deux intégrales simples.

## 3.0.6 EXEMPLE. .

Soit  $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$  et  $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0, y \geq 0\}$



Dans le domaine  $D$ , pour  $x \in [0, 1]$  fixé,  $f(x, y)$  est une fonction de la variable  $y$  et  $y \in [0, \sqrt{1-x^2}]$

$$\text{Alors, } \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2) dy = \left[ (1-x^2)y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$(1-x^2)\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{1-x^2}^3}{3} = \frac{2}{3}(\sqrt{1-x^2})^3.$$

$$\text{Ainsi, } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \frac{2}{3} (\sqrt{1-x^2})^3 dx =$$

$$\frac{2}{3} \int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^3 dx. \text{ On fait le changement de variable } x = \sin(t), \text{ par suite}$$

$$t \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ et } dx = \cos(t) dt. \text{ d'où, } \int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^3 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t) dt.$$

$$\text{La linéarisation de } \cos^4(t), \text{ donne } \cos^4(t) = \frac{\cos(4t)}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{4} \text{ et } \int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^3 dx =$$

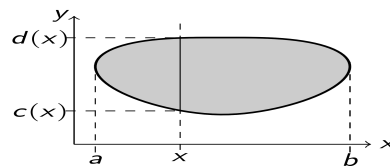
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\cos(4t)}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{4} \right) dt = \frac{3\pi}{16}.$$

$$\text{Finalement, } \iint_D f(x, y) dx dy = \frac{2}{3} \times \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{8}.$$

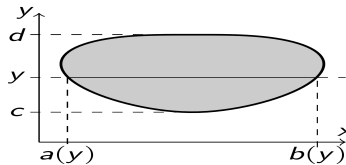
### 3.0.7 DÉFINITION

Un **domaine élémentaire**  $D$  est un domaine du plan de l'une des formes suivantes :

1.  $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}$ , dans ce cas on dit aussi que  $c$  est un rectangle de  $\mathbb{R}^2$
2.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } c(x) \leq y \leq d(x)\}$  où les fonctions  $c$  et  $d$  sont continues. On dira que  $D$  est un domaine **type I** (ou domaine en piles).



3.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ et } a(y) \leq x \leq b(y)\}$  où les fonction  $a : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues. On dira que  $D$  est un domaine **type II** (ou domaine en tranches).



### 3.0.8 REMARQUE

Un rectangle est un domaine qui est à la fois de type I et de type II

## 3.0.3 Calcul d'intégrales doubles à l'aide d'intégrales simples

### 3.0.9 THÉORÈME (THÉORÈME DE FUBINI SUR UN RECTANGLE)

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $D = [a, b] \times [c, d]$  un rectangle. Alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

### 3.0.10 COROLLAIRE

En particulier si  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$  (variables séparées) on a :

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f_1(x)f_2(y) \, dx dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy$$

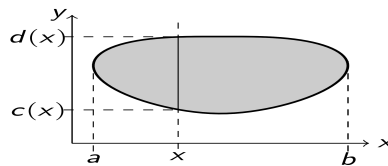
## 3.0.11 THÉORÈME (THÉORÈME DE FUBINI SUR UN DOMAINE DE TYPE I (OU INTÉGRATION EN "PILES"))

Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ et } c(x) \leq y \leq d(x)\}$$

où  $c$  et  $d$  sont deux fonctions continues sur  $[a, b]$ . Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



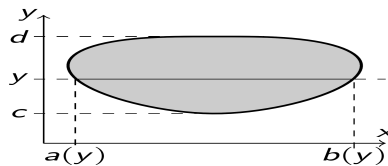
## 3.0.12 THÉORÈME (THÉORÈME DE FUBINI SUR UN DOMAINE DE TYPE II (OU INTÉGRATION EN "TRANCHES"))

Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d] \text{ et } a(y) \leq x \leq b(y)\}$$

où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions continues sur  $[c, d]$ . Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left( \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy$$



## 3.0.13 EXEMPLE ( DE CALCUL D'INTÉGRALES DOUBLES). .

1)

$$\begin{aligned} \iint_{[0,1] \times [0,\pi/2]} x \cos y \, dx dy &= \int_0^1 x \, dx \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 [\sin y]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \iint_{[0,2] \times [0,1]} \frac{1+x^2}{1+y^2} \, dx dy &= \int_0^2 (1+x^2) dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \\ &= \left[ x + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 [\arctan(y)]_0^1 = (2 + \frac{8}{3}) \left( \frac{\pi}{4} \right) = \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

$$3) \iint_{[-1,1] \times [0,1]} (x^2 y - 1) \, dx dy = \int_{-1}^1 \left( \int_0^1 x^2 y - 1 \, dy \right) dx$$

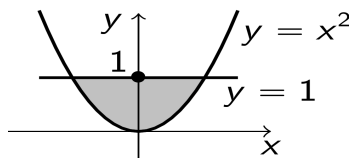
$$= \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 - y \right]_0^1 dx = \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2} x^2 - 1 \right) dx = \left[ \frac{1}{6} x^3 - x \right]_{-1}^1 = -\frac{5}{3}$$

## 3.0.14 REMARQUE

On aurait pu opérer de cette manière :

$$\begin{aligned} \iint_{[-1,1] \times [0,1]} (x^2 y - 1) \, dx dy &= \iint_{[-1,1] \times [0,1]} x^2 y \, dx dy - \iint_{[-1,1] \times [0,1]} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 x^2 dx \int_0^1 y dy - \text{Aire}([-1,1] \times [0,1]) = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \times \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 - 2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} - 2 = \\ \frac{2}{6} - 2 &= -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

3.0.15 EXEMPLE. Soit à calculer l'aire de  $D$  la partie bornée de  $\mathbb{R}^2$  délimitée par la parabole d'équation,  $y = x^2$  et la droite  $y = 1$ .



On peut représenter  $D$  par  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], x^2 \leq y \leq 1\}$ , c'est un domaine de type I.

$$\begin{aligned}
 \text{Par conséquent : } \iint_D dx dy &= \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 dy \right) dx \\
 &= \int_{-1}^1 [y]_{x^2}^1 dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx \\
 &= \left[ x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \left( 1 - \frac{1}{3} \right) - \left( -1 + \frac{1}{3} \right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

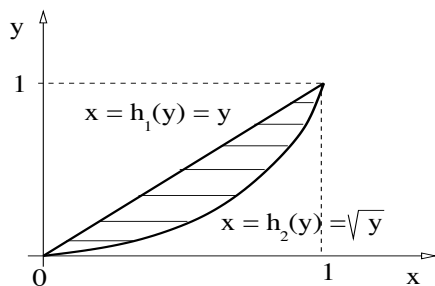
**3.0.16 EXEMPLE.** Calculer l'intégrale  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$  où  $D$  est le triangle de sommets  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$  et  $(1, 0)$ .

Pour cela on décrit  $D$  comme un domaine de type I :

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x - 1 \leq y \leq 1 - x\}$  on aura

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 \left( \int_{x-1}^{1-x} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x-1}^{1-x} dx = 2 \int_0^1 \left( x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx \\
 &= 2 \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12} \right]_0^1 = 2 \left( \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 0 \right) - \left( 0 - 0 - \frac{1}{12} \right) \right) = 2 \left( \frac{4-3+1}{12} \right) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

**3.0.17 EXEMPLE.** Soit à calculer  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$  où  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 1], y \leq x \leq \sqrt{y}\}$ , c'est un domaine de type II.



On a alors

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 \left( \int_y^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_y^{\sqrt{y}} dy \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{1}{3} y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} y^3 - y^3 \right) dy \\
 &= \left[ \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\
 &= \frac{2}{15} + \frac{2}{7} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{9}{3 \times 5 \times 7} = \frac{3}{35}.
 \end{aligned}$$

3.0.18 EXEMPLE. On veut calculer  $I = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{e^y}{y} dy dx$ , on sait que  $I$  existe puisque

la fonction à intégrer est continue, par contre comme  $y \rightarrow \frac{e^y}{y}$  n'a pas de primitive (qui s'exprime avec les fonctions élémentaires) on ne peut la calculer, une solution comme c'est une intégrale double, c'est d'échanger l'ordre d'intégration :

1) le domaine d'intégration est  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x \leq y \leq \sqrt{x}\}$  (de type I), qu'on peut écrire en domaine de type II,  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq 1 \leq y \text{ et } y^2 \leq x \leq y\}$ .

2) Alors

$$I = \int_0^1 \int_{y^2}^y \frac{e^y}{y} dx dy = \int_0^1 \frac{e^y}{y} (y - y^2) dy = \int_0^1 (e^y - ye^y) dy = [-ye^y + 2e^y]_0^1 = e - 2.$$

### Intégration sur un domaine réunion de domaines élémentaires

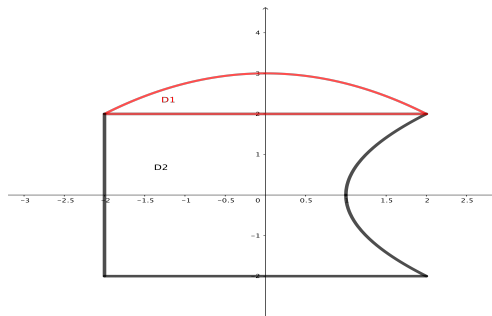
Si  $D \subset \mathbb{R}^2$  n'est pas un rectangle et ne peut être défini en utilisant les graphes de deux fonctions, on décompose si possible,  $D$  en domaines du type I et II et on utilise ensuite la propriété 3.

Si  $D$  est réunion de deux domaines  $D_1$  et  $D_2$  et que  $D_1$  et  $D_2$  ont une intersection vide, ou contenue dans leur bord (autrement dit, les intérieurs des deux domaines ne se rencontrent pas).

Dans ce cas, si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $D$  on a

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy$$

**3.0.19 EXEMPLE.** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq \frac{y^2}{4} + 1 \text{ et } -2 \leq y \leq -\frac{x^2}{4} + 3\}$



Alors  $D = D_1 \cup D_2$  avec  $D_1 = \{(x, y) \in D \mid x \in [-2, 2], 2 \leq y \leq -\frac{x^2}{4} + 3\}$   
et

$D_2 = \{(x, y) \in D \mid y \in [-2, 2], -2 \leq x \leq \frac{y^2}{4} + 1\}$

Par conséquent :  $\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_{-2}^2 \left( \int_{-\frac{x^2}{4} + 3}^2 f(x, y) \, dy \right) dx + \int_{-2}^2 \left( \int_{-2}^{\frac{y^2}{4} + 1} f(x, y) \, dx \right) dy$

**3.0.20 EXEMPLE.** Quelle est l'aire du domaine  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + 2y \leq x \leq y + 2\}$ ?

Un calcul nous donne les ordonnées des deux points d'intersection des courbes  $x = y^2 + 2y$  et  $x = y + 2$ , soit  $y = -2$  et  $y = 1$ . En utilisant une intégration par tranches, on aura

$$\text{Aire}(D) = \int_{-2}^1 \int_{y^2 + 2y}^{y + 2} dx dy = \int_{-2}^1 (y + 2 - y^2 - 2y) dx dy = \left[ -\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

## 3.0.21 REMARQUE

Le calcul de l'aire de  $D$  par piles est moins simple, il faudrait résoudre  $y^2 + 2y = x$  pour trouver les bornes d'intégrations et faire un découpage de  $D$ .

3.0.22 EXEMPLE (VOLUME D'UNE BOULE DE RAYON  $R$ ). Soit une boule de rayon  $R > 0$ , par translation on se ramène à  $B_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ , la boule centrée en l'origine et de rayon  $R > 0$ . D'autre part

$$\text{Volume}(B_R) = R^3 \cdot \text{Volume}(B_1),$$

il suffit donc de calculer  $\text{Volume}(B_1)$ .

Par symétrie, son volume est égal au double de celui de la demi-boule supérieure

$$B^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\},$$

(qui forme le volume délimité par le graphe de la fonction  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  et le disque  $x^2 + y^2 \leq 1$ )

On a alors

$$\text{Volume}(B_1) = 2 \iint_{D_1} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy$$

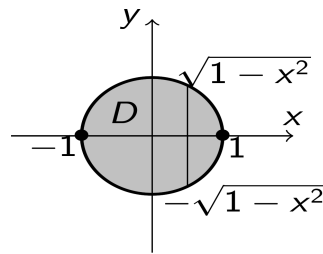
où  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  est le disque de rayon 1.

On peut représenter  $D_1$  comme un domaine de type I,

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\},$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \text{Volume}(B_1) &= 2 \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dy \right) dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} \sqrt{1 - \frac{y^2}{1-x^2}} \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

En posant  $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \sin t$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , on aura  $dy = \sqrt{1-x^2} \cos t \, dt$  et  $\sqrt{1 - \frac{y^2}{1-x^2}} = \cos t$ .



$$\begin{aligned} \text{Volume}(B_1) &= 2 \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} dy \\ &= 2 \int_{-1}^1 dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-x^2} \cos t \sqrt{1-x^2} \cos t dt \\ &= 2 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt \end{aligned}$$

puisque  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \frac{\pi}{2}$ .

$$\text{Volume}(B_1) = \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \pi \left[ x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

par suite

$$\text{Volume}(B_R) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

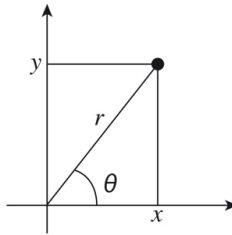
On verra, qu'avec un changement de variables, les calculs sont beaucoup plus simples.

### 3.0.4 Les coordonnées polaires :

Le calcul de l'intégrale  $I = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy$  où  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0, y \geq 0\}$  en coordonnées cartésiennes (voir page 46) n'est pas très adapté à ces coordonnées, le domaine est circulaire et la fonction ne dépend que de la distance à l'origine ; on va voir qu'il est beaucoup plus aisé en coordonnées polaires.

#### Les coordonnées polaires

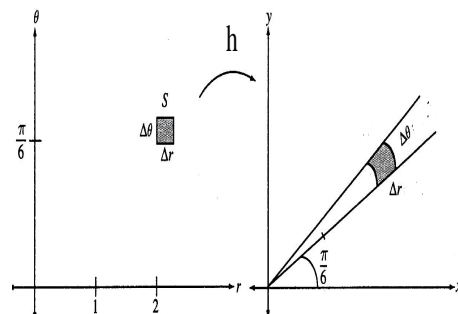
On rappelle qu'en coordonnées polaires, un point  $M = (x, y)$  du plan est entièrement déterminé par sa distance  $r$  à l'origine et l'angle  $\theta$  que fait  $\overrightarrow{OM}$  avec l'axe  $Ox$ .



Les relations traduisant le passage aux coordonnées polaires sont alors  $x = r \cos(\theta)$  et  $y = r \sin(\theta)$ .

On va voir maintenant, comment l'élément d'aire  $dA = dx dy$  ( ou  $dy dx$ ) s'écrit en coordonnées polaires.

Soit  $h$  l'application définie par  
 $h(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$



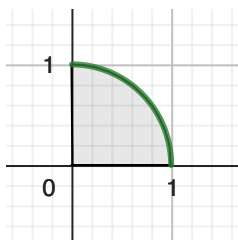
Par l'application  $h$ , le rectangle  $S = [r, r'] \times [\theta, \theta']$  est transformé en un morceau de couronne situé dans le secteur angulaire délimité par les rayons  $r$  et  $r'$  et d'angle  $\Delta\theta = \theta' - \theta$ . On pose  $\Delta r = r' - r$ .

On remarquera alors que l'aire du rectangle est égale à  $\Delta r \times \Delta \theta$  et que celle de son image est

$$\frac{1}{2}(r'^2 - r^2)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r' + r)\Delta r\Delta\theta$$

Lorsque  $r'$  est très proche de  $r$ ,  $\frac{1}{2}(r' + r) \sim r$ , par suite l'aire se retrouve multipliée par  $r$ , ainsi on a  $dA = r dr d\theta$ .

**3.0.23 EXEMPLE.** On reprend l'intégrale  $I = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy$  où  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0, y \geq 0\}$ .



En coordonnées polaires  $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\} = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ , l'intégrand  $(1 - (x^2 + y^2)) dA = (1 - r^2) r dr d\theta$  d'où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \times \int_0^1 (r - r^3) dr = \frac{\pi}{2} \times \left[ \frac{r}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \times \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8}.$$

**3.0.24 EXEMPLE (VOLUME D'UNE BOULE DE RAYON R).** Si on reprend le calcul du volume de la boule de rayon  $R$ ,  $B_R$  (voir ex.3.0.2.3), en utilisant cette fois les coordonnées polaires on aura

$$\text{Volume}(B_1) = 2 \iint_{D_1} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr d\theta$$

où  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  est représenté en coordonnées polaires par  $\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$\text{Par suite, } \text{Volume}(B_1) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr d\theta = 2 \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \times \left( \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr \right) = 2 \times [ \theta ]_0^{2\pi} \times \left[ \frac{-1}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 2 \times (2\pi) \times \frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{Ainsi, } \text{Volume}(B_R) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

### 3.1 Applications

Plusieurs quantités physiques peuvent être exprimées comme des intégrales multiples. De telles expressions sont fondées sur la définition de l'intégrale comme la limite d'une somme.

#### 1) La masse d'un solide (plat)

On a vu par exemple que si  $D$  est un domaine borné du plan, alors

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx dy.$$

Plus généralement, si  $D$  a une densité de masse (par unité d'aire)  $\rho$ , alors  $\Delta_m = \rho \Delta A$ , par suite la **masse totale** de  $D$  est donnée par l'intégrale

$$M(D) = \iint_D dm = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

**3.1.1 EXEMPLE.** De la farine est éparpillée sur le sol selon une densité  $\rho(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2} + 1)^2}$ , où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Déterminer la quantité totale de farine éparpillée sur un disque  $D$  de rayon  $R > 0$  centré en l'origine.

**Réponse :** En coordonnées polaires, on a

$$\rho(r, \theta) = \frac{1}{(r+1)^2} \text{ et } D = \{(r, \theta) \mid r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi[ \}. \text{ Ainsi :}$$

la quantité totale de farine = la masse totale  $M(D)$

$$\begin{aligned} &= \iint_D \frac{1}{(r+1)^2} r dr d\theta = \iint_D \frac{r}{(r+1)^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^R \left( \frac{r+1}{(r+1)^2} - \frac{1}{(r+1)^2} \right) dr \\ &= 2\pi \int_0^R \left( \frac{1}{r+1} - \frac{1}{(r+1)^2} \right) dr = 2\pi \left[ \ln(r+1) + \frac{1}{r+1} \right]_0^R = 2\pi \left( \ln(R+1) + \frac{1}{R+1} - 1 \right) \\ &= 2\pi \left( \ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right). \end{aligned}$$

#### 3.1.2 REMARQUE

Comme une masse est toujours positive, on obtient du calcul précédent, l'inégalité :

$$\ln(t+1) \geq \frac{t}{t+1}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

- 2) Moyenne et moyenne pondérée : Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  et  $f(x, y)$  une fonction continue sur ce domaine.

### 3.1.3 DÉFINITION

- (i) On appelle **moyenne** de la fonction  $f$  sur le domaine  $D$ , le nombre

$$\text{réel } \frac{1}{\text{Aire}(D)} \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

- (ii) Si de plus le domaine  $D$  à une densité  $\rho$ , on appelle **moyenne pondérée** de la fonction  $f$  sur le domaine  $D$ , le nombre réel

$$\frac{1}{\text{masse}(D)} \iint_D f(x, y) \rho(x, y) \, dx dy.$$


---

### 3.1.4 DÉFINITION

Un domaine  $D$  est dit **homogène** si sa densité est constante.

---

### 3.1.5 REMARQUE

Pour un domaine homogène, la moyenne pondérée est égale à la moyenne.

- 3) Centre de gravité ( ou centre de masse ) :

### 3.1.6 DÉFINITION

Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  de densité  $\rho$ . Le centre de gravité de  $D$  est le point de coordonnées  $(x_G, y_G)$  tel que  $x_G$  soit la moyenne pondérée des abscisses et  $y_G$  la moyenne pondérée des ordonnées, i.e.

$$x_G = \frac{1}{\text{masse}(D)} \iint_D x \rho(x, y) \, dx dy \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{\text{masse}(D)} \iint_D y \rho(x, y) \, dx dy$$


---

4) Moment d'inertie :

Le moment d'inertie d'un mouvement de rotation, est ce qu'est la masse pour le mouvement de translation, il reflète la résistance qu'oppose l'objet à sa mise en mouvement.

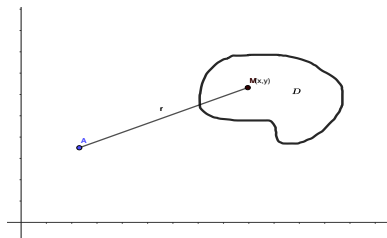
## 3.1.7 DÉFINITION (MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT À UN POINT)

Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  de densité  $\rho$ .

Le moment d'inertie de  $D$  par rapport à un point  $A$  de coordonnées  $(a, b)$  est le nombre réel positif :

$$I_{(a,b)} = \iint_D (r(x,y))^2 \rho(x,y) \, dx dy$$

où  $r(x,y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  est la distance de  $(x,y)$  au point  $(a,b)$ .

3.1.8 EXEMPLE. Le moment d'inertie de  $D$  par rapport à l'origine est

$$I_{(0,0)} = \iint_D ((x-a)^2 + (y-b)^2) \rho(x,y) \, dx dy$$

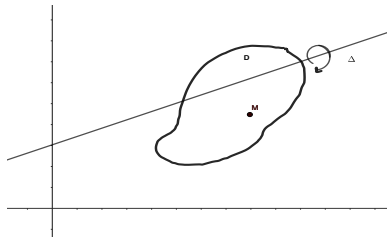
## 3.1.9 DÉFINITION (MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT À UNE DROITE)

Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  de densité  $\rho$  et  $\Delta$  une droite du plan.

Le moment d'inertie de  $D$  par rapport à la droite  $\Delta$  est le nombre réel positif :

$$I_{\Delta} = \iint_D (r(x,y))^2 \rho(x,y) \, dx dy$$

où  $r(x,y)$  est la distance de  $(x,y)$  à la droite  $\Delta$ .



## 3.1.10 EXEMPLE (CALCUL DE LA DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE).

- (i) Si  $\Delta$  est l'axe des abscisses ( respectivement des ordonnées) alors  $r(x, y) = |y|$  (respectivement  $r(x, y) = |x|$ ).
- (ii) Plus généralement, l'équation d'une droite  $\Delta$  du plan est de la forme

$$ax + by + c = 0 \text{ avec } (a, b) \neq (0, 0).$$

Alors, la distance d'un point  $(x, y)$  à la droite  $\Delta$  est donnée par la formule

$$r(x, y) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ (à démontrer en exercice).}$$

Par exemple, la distance du point  $(3, 4)$  à la droite  $y = 2x + 1$  est

$$r(3, 4) = \frac{|2 \times 3 - 4 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

3.1.11 EXEMPLE. Soit  $D$  un disque homogène de densité 1, centré en  $O = (0, 0)$  et de rayon  $R > 0$ .

- (i) Le moment d'inertie de  $D$  par rapport à son centre est

$$I_O = \iint_D (r(x, y))^2 dx dy = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

Pour calculer cette intégrale on passe en coordonnées polaires.

On a  $D = \{r, \theta \mid r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi]\}$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$  et  $dA = r dr d\theta$ , d'où

$$I_O = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = [\theta]_0^{2\pi} \times \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2}.$$

- (ii) On veut calculer le moment d'inertie du disque par rapport à un point de sa circonférence (comme pour faire tourner un frisbee (disque volant)). Soit  $A = (a, b)$  un point de la circonférence du cercle; donc  $a^2 + b^2 = R^2$ .

$$\text{Alors } I_A = \iint_D (r(x, y))^2 dx dy = \iint_D ((x - a)^2 + (y - b)^2) dx dy.$$

$$\begin{aligned}
I_A &= \iint_D (r(x, y))^2 dx dy = \iint_D ((x - a)^2 + (y - b)^2) dx dy \\
&= \iint_D (x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2) dx dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 - 2ar \cos(\theta) - 2br \sin(\theta) + R^2) r dr d\theta \\
&= \int_0^R \left( r^3 \int_0^{2\pi} d\theta - 2ar^2 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta - 2br^2 \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta + rR^2 \int_0^{2\pi} d\theta \right) dr \\
&= 2\pi \int_0^R (r^3 - 0 - 0 + rR^2) dr \\
&= 2\pi \left( \frac{R^4}{4} + \frac{R^4}{2} \right) = \frac{3\pi R^4}{2} = 3I_0.
\end{aligned}$$

Ce calcul montre qu'il y a 3 fois plus de résistance à faire tourner un frisbee en un point de sa circonférence qu'en son centre.

## 3.2 Changement de variables

### 3.2.1 DÉFINITION

Soient  $D'$  et  $D$  des ouverts bornés de  $\mathbb{R}^2$  et  $h : D' \rightarrow D$  une application de classe  $C^1$ , donnée par  $h(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ .

1) La matrice jacobienne de  $h$  au point  $(u, v)$  est la matrice

$$Jac_h(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

2) Le jacobien de  $h$  au point  $(u, v)$  est le déterminant de la matrice  $Jac_h(u, v)$

$$\det Jac_h(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u, v).$$

### 3.2.2 DÉFINITION (CHANGEMENT DE VARIABLES)

Un changement de variables  $h(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$ ,  $h : D' \rightarrow D : (u, v) \mapsto h(u, v) = (x, y)$  c'est-à-dire que  $h$  est une bijection de classe  $C^1$  avec une application réciproque de classe  $C^1$ ,  $h^{-1} : D \rightarrow D' : (x, y) \mapsto h^{-1}(x, y) = (u, v)$ .

## 3.2.3 REMARQUE

Pour montrer que  $h$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$ , il suffit de montrer :

- (i)  $h$  est une bijection, d'où  $h^{-1}$  existe.
- (ii) les dérivées partielles  $\frac{\partial x}{\partial u}(u, v)$ ,  $\frac{\partial x}{\partial v}(u, v)$ ,  $\frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$  et  $\frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$  sont continues, d'où  $h$  est de classe  $C^1$
- (iii)  $\det Jac_h(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \neq 0$  en tout point  $(u, v)$ . En effet, grâce au théorème d'inversion locale,  $h^{-1}$  sera de classe  $C^1$

## 3.2.4 REMARQUE

L'application réciproque d'une application de classe  $C^1$ , n'est pas toujours dérivable. Par exemple, la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$  est bijective et de classe  $C^\infty$ , mais sa fonction réciproque,  $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{si } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} & \text{si } y < 0, \end{cases}$  n'est pas dérivable en 0.

C'est pour cela qu'on impose dans la définition de changement de variables, que  $h^{-1}$  soit de classe  $C^1$ .

### 3.2.1 Retour aux changement de variables en coordonnées polaires

## 3.2.5 PROPOSITION

L'application  $h : ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$  définie par  $h(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  est un changement de variables c-à-d un difféomorphisme de classe  $C^1$  (même de classe  $C^\infty$ ). En outre pour tout  $(r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[$  on a  $\det Jac_h(r, \theta) = r$ .

*Démonstration:* 1)  $h$  est de classe  $C^1$ , car les fonctions  $r \mapsto r$ ,  $\theta \mapsto \cos \theta$  et  $\theta \mapsto \sin \theta$  ont des dérivées continues.

2)  $h$  est bijective : En effet si  $h(r, \theta) = h(r', \theta')$  alors  $\|h(r, \theta)\| = \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = r$  et  $\|h(r', \theta')\| = \sqrt{(r' \cos \theta')^2 + (r' \sin \theta')^2} = r'$ , d'où  $r = r'$ . Par suite  $\cos \theta = \cos \theta'$  et  $\sin \theta = \sin \theta'$  et donc  $\theta' = \theta$ . Finalement  $(r, \theta) = (r', \theta')$ , on obtient ainsi l'injectivité de  $h$ .

Maintenant, tout  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$  est représenté par un angle  $\theta \in ]-\pi, \pi[$  et un module  $r = \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} > 0$ , d'où la

surjective de  $h$ . On a donc montré que  $h$  est injective et surjective donc bijective.

3) pour tout  $(r, \theta) \in D'$ ,  $\det Jac_h(r, \theta) \neq 0$ .

en effet,  $Jac_h(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$  et donc  $\det Jac_h(r, \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \neq 0$ .

Comme  $\det Jac_h(r, \theta) = r \neq 0$ , en tout point  $(r, \theta) \in D'$ , d'après le théorème d'inversion locale,  $h^{-1}$  sera de classe  $C^1$  en tout point  $(x, y) = h(r, \theta) \in D$  ainsi  $h$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$ .

### 3.2.7 REMARQUE

On peut faire mieux et déterminer explicitement  $h^{-1}$ . En effet, on a  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  d'où  $x^2 + y^2 = r^2$  par suite  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . D'autre part, pour  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{r \sin \theta}{r + r \cos \theta} = \frac{y}{r + x}$ . Comme  $\tan : ] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  a pour fonction réciproque  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow ] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$  et  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{y}{r+x}$ , on aura  $\frac{\theta}{2} = \arctan \frac{y}{r+x}$  c-à-d  $\theta = 2 \arctan \frac{y}{r+x}$ .

Ainsi, l'application réciproque de  $h$ ,  $h^{-1} : D \rightarrow D'$  qui à  $(x, y) \in D$  associe ses "coordonnées polaires"  $(r, \theta) \in D'$  est définie par

$$h^{-1}(x, y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}, 2 \arctan \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right) \right).$$

### 3.2.2 Le changement de variables dans une intégrale double

Le but de cette partie est de montrer comment l'élément  $dxdy$  se transforme par un changement de variables et d'établir la formule de changement de variables.

On va commencer par un exemple simple.

**3.2.8 EXEMPLE.** On veut calculer l'aire du domaine borné délimité par l'ellipse  $\mathcal{E}$  de demi-axes  $a \geq b > 0$  :  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = \iint_{\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\}} dxdy.$$

La meilleure manière est de redimensionner l'ellipse en un disque unité  $D$ , pour cela on fait le change  $u = \frac{x}{a}$  et  $v = \frac{y}{b}$ . Alors,  $dx = a du$  et  $dy = b dv$ , d'où  $dxdy = ab dudv$ . Ainsi,

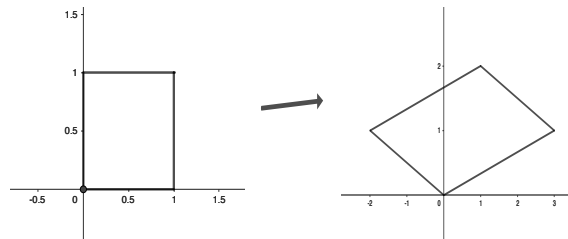
$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = \iint_{\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\}} dxdy = ab \iint_{\{u^2 + v^2 \leq 1\}} dudv = ab \cdot \text{Aire}(D) = ab\pi.$$

En général, on doit déterminer le facteur d'échelle (le rapport entre  $dxdy$  et  $dudv$ ).

**3.2.9 EXEMPLE.** Supposons qu'on fasse le changement de variables

$$\begin{cases} x = 3u - 2v \\ y = u + v. \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Quelle est la relation entre  $dxdy$  et  $dudv$ ? On considère un petit rectangle d'aire  $\Delta u \Delta v$ , son image est un parallélogramme d'aire  $\Delta A$  dans les coordonnées  $xy$ . Dans ce cas, le facteur d'échelle est indépendant du choix du rectangle. On peut choisir alors le carré unité  $A = [0, 1] \times [0, 1]$  dans les coordonnées  $u$  et  $v$ , son image est alors le parallélogramme  $A'$  de sommets  $(0, 0)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(-2, 1)$  et  $(1, 2)$ .



Comme  $\text{Aire}(A) = 1$  et  $\text{Aire}(A') = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 + 2 = 5$ , on en déduit que

$$dx dy = 5 du dv.$$

### 3.2.10 REMARQUE

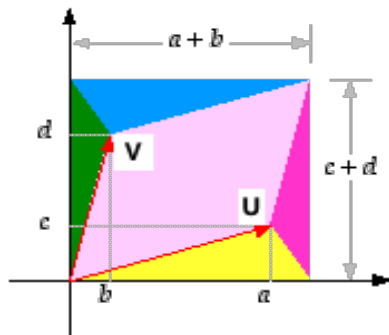
On rappelle que le déterminant permet de mesurer des aires en dimension 2. Pour deux vecteurs non-colinéaires  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans  $\mathbb{R}^2$ , la valeur absolue du déterminant  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  est égale à l'aire du parallélogramme engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

En effet, si  $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  sont de vecteurs non colinéaires de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $M$  la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $\det M = ad - bc \neq 0$ . L'aire du parallélogramme engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  (la partie rose de la figure, deux cas se présentent) est égal à :

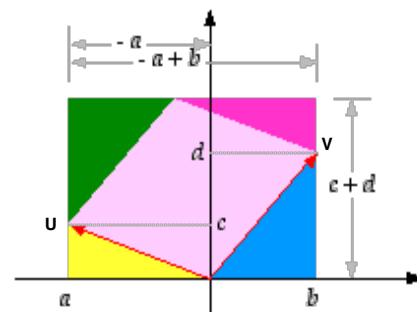
- i) Aire du parallélogramme  $= (a+b)(c+d) - (a+d)c - b(c+d) = ad - bc = \det M$  (figure1)
- ii) Aire du parallélogramme  $= (-a+b)(c+d) - (-a)c - bd = -ad + bc = -\det M$  (figure2)

Dans tous les cas on aura,

$$\text{l'aire du parallélogramme} = |\det M| = |ad - bc| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|.$$



(a) figure1



(b) figure2

**Le cas général :**

L'idée est si on fixe un point, au voisinage de ce point (localement), on peut faire une approximation linéaire et se ramener au cas linéaire.

Soit le changement de variables de classe  $C^1$ ,  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ .

Alors,  $\begin{cases} \Delta x \simeq \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \\ \Delta y \simeq \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \end{cases}$  sous forme matricielle  $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$ .

Le même argument que dans le cas linéaire, montre que le facteur d'échelle est la valeur absolue du déterminant de la matrice. Ainsi, le facteur  $|\det Jac_h(x, y)|$  mesure le fait que le difféomorphisme  $h$  a tendance à dilater ou contracter les aires au voisinage de  $(x, y)$ .

On peut énoncer maintenant la formule de changement de variables dans une intégrale double :

**3.2.11 THÉORÈME**

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction des variables  $(x, y)$  et  $(x, y) = h(u, v)$  un changement de variables. Alors

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{h^{-1}(D)} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv}$$

où  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det Jac_h(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$  est le Jacobien de  $h$ .

---

## 3.2.12 REMARQUE (IMPORTANTE)

Cette formule de changement de variables est aussi valable sous des conditions moins fortes. Introduisons à cet effet la notion suivante :

## 3.2.13 DÉFINITION

Une partie  $C$  de  $\mathbb{R}^2$  est dite **négligeable** si son aire est nulle.

3.2.14 EXEMPLE. un point, un segment, un cercle sont des exemples de parties négligeables de  $\mathbb{R}^2$ ; plus généralement, une réunion finie (même dénombrable) d'images d'applications de classe  $C^1$ , d'un intervalle fermé  $I$  dans  $\mathbb{R}^2$  est une partie négligeable dans  $\mathbb{R}^2$ .

Voici les conditions moins fortes sous lesquelles la formule de changement de variables est encore valable :

## 3.2.15 THÉORÈME

Soient  $D'$  et  $D$  des ouverts bornés de  $\mathbb{R}^2$  et  $h : D' \rightarrow D$  une application de classe  $C^1$ , donnée par  $h(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ .

1. Il existe deux parties négligeables  $C \subset D$  et  $C' \subset D'$  telle que  $h$  soit une bijection de  $D' - C'$  sur  $D - C$
2.  $\det Jac_h(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \neq 0$ , en tout point  $(u, v)$  de  $D' - C'$ .

Alors pour toute fonction  $f$  continue sur  $D$ , on a la formule de changement de variable :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

**Exemples de base**

On considère un domaine élémentaire  $D$ . On commence par tester la formule de changement de variables sur des cas simples où elle peut être obtenue à la main.

3.2.16 EXEMPLE. Pour  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , on considère la translation de vecteur  $(x_0, y_0)$

$$T_{(x_0, y_0)} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto & (x, y) = (u + x_0, v + y_0) \end{cases}$$

$T_{(x_0, y_0)}$  réalise un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  (sa réciproque est

$T_{(-x_0, -y_0)}$ ) et donc de tout ouvert simple sur son image. En outre pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  on a  $\text{Jac } T_{(x_0, y_0)}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et donc  $|\det \text{Jac } T_{(x_0, y_0)}| = 1$ .

La formule de changement de variables donne, alors

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{T_{(-x_0, -y_0)}(D)} f(u + x_0, v + y_0) du dv.$$

Par exemple, si  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } c(x) \leq y \leq d(x)\}$ , alors

$D' = T_{(x_0, y_0)}^{-1}(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid a - x_0 \leq u \leq b - x_0 \text{ et } c(u + x_0) - y_0 \leq v \leq d(u + x_0) - y_0\}$

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx = \int_{a-x_0}^{b-x_0} \int_{c(u+x_0)-y_0}^{d(u+x_0)-y_0} f(u + x_0, v + y_0) du dv.$$

### 3.2.17 REMARQUE

Cette formule s'obtient en fait facilement en faisant deux changements de variables successifs dans des intégrales simples.

3.2.18 EXEMPLE. Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  on note  $T_{1,2,\lambda} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto (u + \lambda v, v) \end{cases}$ .

L'application  $T_{1,2,\lambda}$  réalise un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  (sa réciproque est  $T_{1,2,-\lambda}$ ). En outre pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\text{Jac } T_{1,2,\lambda}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et donc } |\det \text{Jac } T_{1,2,\lambda}| = 1.$$

La formule de changement de variables donne, alors

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{T_{1,2,-\lambda}(D)} f(u + \lambda v, v) du dv.$$

Par exemple, si  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ et } a(y) \leq x \leq b(y)\}$ , alors  $D' = T_{1,2,-\lambda}(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq v \leq d \text{ et } a(v) - \lambda v \leq u \leq b(v) - \lambda v\}$

La formule de changement de variables donne dans ce cas :

$$\int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{a(v)-\lambda v}^{b(v)-\lambda v} f(u + \lambda v, v) du dv.$$

À nouveau, il est facile de vérifier directement que cette formule.

3.2.19 EXEMPLE. On note par  $S : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (y, x) \end{cases}$  (la symétrie par rapport à la droite  $y = x$ ). L'application  $S$  réalise un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dans

$\mathbb{R}^2$  (sa fonction réciproque est elle-même c-à-d  $S^{-1} = S$ ). En outre pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  on a

$\text{Jac } S(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et donc  $|\det \text{Jac } S| = |-1| = 1$ . La formule de changement de variables nous donne, pour toute fonction continue  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{S(D)} f(y, x) dx dy.$$

En particulier, si le domaine  $D$  est symétrique par rapport à la droite  $y = x$ , (c-à-d  $S(D) = D$ ) on aura  $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy$ .

**3.2.20 Exercice** Montrer, sans calcul, que  $\iint_{\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}} (x^2 - y^2) dx dy = 0$ .

**3.2.21 EXEMPLE.** Pour  $\lambda \neq 0$  on note  $h_{1, \lambda} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (\lambda x, y) \end{cases}$

L'application  $h_{1, \lambda}$  réalise un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  (sa réciproque est  $h_{1, \frac{1}{\lambda}}$ ). En outre pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  on a  $|\det \text{Jac}_{h_{1, \lambda}}(x, y)| = |\lambda|$ . La formule de changement de variables nous dit alors que si on dilate le problème par un coefficient  $\lambda$  dans une direction, on multiplie les aires par  $|\lambda|$ , ce qu'on aurait encore pu vérifier directement.

**3.2.22 REMARQUE**

De même, si on dilate le problème par un coefficient  $\lambda$  dans les deux directions à l'aide de l'homothétie  $h(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ , on multiplie dans ce cas les aires par  $\lambda^2$ , ce qui aurait pu aussi être vérifié directement. Dans ce cas,  $f = 1$ , et on a  $\text{Aire}(D) = \text{Aire}(h(D')) = \iint_{h(D')} dx dy = \lambda^2 \iint_{D'} du dv = \lambda^2 \text{Aire}(D')$ .

Ainsi, le facteur  $|\det \text{Jac}_h(x, y)|$  mesure le fait que le difféomorphisme  $h$  a tendance à dilater ou contracter les aires au voisinage de  $(x, y)$ .

**3.2.23 EXEMPLE (L'AIRES D'UNE ELLIPSE).** Soient  $a, b > 0$ . On considère l'ellipse

$$\mathcal{E}_{a, b} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

L'application  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $h(u, v) = (au, bv)$  est un  $C^1$ -difféomorphisme. En effet,  $h^{-1}(x, y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$  est de classe  $C^1$ . En outre

$\det Jac_h(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = ab$ . On peut donc effectuer le changement de variables  $(x, y) = h(u, v)$ , avec  $dxdy = |\det Jac_h(u, v)|dudv = ab dudv$ .

D'autre part, on a  $u^2 + v^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  donc  $h$  réalise une bijection du disque unité fermé  $D = \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 1\}$  sur l'ellipse  $\mathcal{E}_{a,b}$ .

La formule de changement de variable nous donne alors :

$$\text{Aire}(\mathcal{E}_{a,b}) = \iint_{\mathcal{E}_{a,b}} dxdy = ab \iint_D dudv = ab \cdot \text{Aire}(D) = ab\pi.$$

On retrouve la formule de changement de variables en coordonnées polaires

### 3.2.24 THÉORÈME (CHANGEMENT DE VARIABLES EN COORDONNÉES POLAIRES)

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, avec  $D$  domaine régulier. Alors on a

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{h^{-1}(D)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta}$$

### 3.2.25 REMARQUE

La demi-droite  $C = \{(x, 0), x \leq 0\}$  et son image réciproque  $C' = h^{-1}(C) = \{(r, \theta) | \theta = \pm\pi\} \cup \{(0, \theta) | \theta \in [-\pi, \pi]\}$  sont des parties négligeables de  $\mathbb{R}^2$ .

D'après la remarque (importante), la formule de changement de variables en coordonnées polaires est encore valable pour tout domaine borné  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.2.26 COROLLAIRE

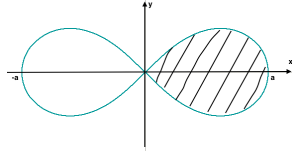
Soient  $D = \{(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 | \theta \in [\theta_0, \theta_0 + \phi] \text{ et } r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\}$ , où  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\phi \in ]-\pi, \pi[$  et deux fonctions continues  $r_1$  et  $r_2$  sur  $[\theta_0, \theta_0 + \phi]$  telles que  $0 \leq r_1 < r_2$ . Alors pour toute fonction  $f$  continue sur  $D$  on a :

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \phi} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta.$$

**3.2.27 EXEMPLE (LA LEMNISCATE DE BERNOULLI).** Soit  $a > 0$ , la lemniscate de Bernoulli  $L_a$  est la courbe d'équation (implicite)

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

En passant en coordonnées polaires, on a  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ , soit  $(x, y) \in L_a \iff (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \iff r^4 = a^2 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = a^2 r^2 \cos(2\theta) \iff r = 0$  ou bien  $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$ . Comme  $\cos(2\theta) = \frac{r^2}{a^2} \geq 0$ , il est donc nécessaire que  $2\theta \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , c-à-d  $\theta \in [-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy (elle est aussi symétrique par rapport à Ox et par rapport à l'origine), il suffit, pour l'étudier de se restreindre à  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ . Pour calculer l'aire du do-



maine délimité par  $L_a$ , il suffit de calculer l'aire de la partie hachurée et de multiplier ce nombre par 2. D'après ce qui précède, le domaine hachuré  $D_1$  est défini, en coordonnées polaires par :  $0 \leq r \leq \sqrt{a^2 \cos(2\theta)} = a\sqrt{\cos(2\theta)}$  et  $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ . Alors,

$$\begin{aligned} \text{Aire}(D_1) &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{a\sqrt{\cos(2\theta)}} r dr \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{a\sqrt{\cos(2\theta)}} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{a^2 \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta = \frac{a^2}{2} \left[ \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'aire du domaine délimité par  $L_a$  est égal à  $2 \times \text{Aire}(D_1) = a^2$ .

**3.2.28 EXEMPLE (VOLUME D'UNE BOULE  $B_R$  DE RAYON  $R$ ).** Par translation, on peut se ramener à la boule  $B_R$  centrée en  $(0,0)$  et de rayon  $R$ . On a déjà vu que  $\text{Volume}(B_R) = 2 \iint_{D=\{x^2+y^2 \leq R^2\}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$ . On va calculer cette intégrale à l'aide des coordonnées polaires.

Puisque  $D' = \{(r, \theta) \in [0, \infty[ \times [-\pi, \pi] \mid r \leq R\} = [0, R] \times [-\pi, \pi]$ . et  $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$ , on obtient  $\text{Vol}(B_R) = 2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} dr = 4\pi \int_0^R r \sqrt{R^2 - r^2} dr = 4\pi \int_0^R r (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} dr = 4\pi \left[ -\frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

## Chapitre 4

# Intégrales triples

L'intégrale d'une fonction de 3 variables  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sur un domaine borné et régulier  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  se définit selon les mêmes principes que les intégrales simple et double :  
par découpage et échantillonnage .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , l'espace se décompose en cubes de côté  $\frac{1}{n}$  :

$$\begin{aligned} C_{k,l,m} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}, \frac{l}{n} \leq y < \frac{l+1}{n}, \frac{m}{n} \leq z < \frac{m+1}{n}, (k, l, m) \in \mathbb{Z}^3\} \\ &= \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \times \left[ \frac{l}{n}, \frac{l+1}{n} \right] \times \left[ \frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right] \end{aligned}$$

Chaque petit cube  $C_{k,l,m}$  est de côté  $\frac{1}{n}$  et donc de volume  $\frac{1}{n^3}$ .

Sur chaque cube  $C_{k,l,m}$ , contenu dans  $\Omega$ , on évalue  $f$  en un point de  $C_{k,l,m}$ , par exemple au point

$$M_{k,l,m} = \left( \frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \frac{m}{n} \right).$$

On associe à  $f$  et  $n$  la somme de Riemann

$$S_n(f) = \sum_{C_{k,l,m} \subset \Omega} f(M_{k,l,m}) \text{Vol}(C_{k,l,m}) = \frac{1}{n^3} \sum_{C_{k,l,m} \subset \Omega} f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \frac{m}{n}\right).$$

Cette somme est finie car  $\Omega$  est borné.

On a de nouveau un résultat de convergence de ces approximations lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## 4.0.1 THÉORÈME

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur le domaine borné et régulier  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . La suite des sommes de Riemann  $S_n(f)$  converge vers un nombre réel limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## 4.0.2 DÉFINITION (DE L'INTÉGRALE TRIPLE)

On appelle intégrale triple de  $f$  sur  $\Omega$  cette limite, et on la note  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ .

**Propriétés élémentaires de l'intégrale triple**

On passe en revue les propriétés les plus simples de l'intégrale triple. Pour toutes fonctions continues  $f$  et  $g$ , pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$ , on a :

1) **linéarité** : Pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a

$$\iiint_{\Omega} (\lambda f + \mu g) dx dy dz = \lambda \iiint_{\Omega} f dx dy dz + \mu \iiint_{\Omega} g dx dy dz.$$

2) **additivité par découpage** : Si  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  et  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  est de volume nul, alors

$$\iiint_{\Omega} f dx dy dz = \iiint_{\Omega_1} f dx dy dz + \iiint_{\Omega_2} f dx dy dz.$$

3) **positivité, croissance** : Si  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$  pour tout  $(x, y, z) \in \Omega$ , alors

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz.$$

En particulier, si  $f \geq 0$  alors  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \geq 0$ .

4) **positivité par rapport au domaine** : Si  $\Omega_1 \subset \Omega_2$  et  $f \geq 0$  alors

$$\iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dx dy dz.$$

5) **Calcul de volume**

Le volume de  $\Omega$  est l'intégrale triple sur  $\Omega$  de la fonction constante égale à 1 :

$$\text{Volume de } \Omega = \iiint_{\Omega} dx dy dz$$

### 4.0.1 Calcul d'intégrales triples à l'aide d'intégrales doubles et simples

#### 4.0.3 THÉORÈME (THÉORÈME DE FUBINI SUR UN PARALLÉLÉPIPÈDE)

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, définie sur un domaine bornée (à bord régulier) :  $\Omega$  de l'espace.

Si  $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  (un parallélépipède) alors

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy \\ &= \int_{a_3}^{b_3} \left( \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_3}^{b_3} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy = \int_{a_3}^{b_3} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz. \end{aligned}$$

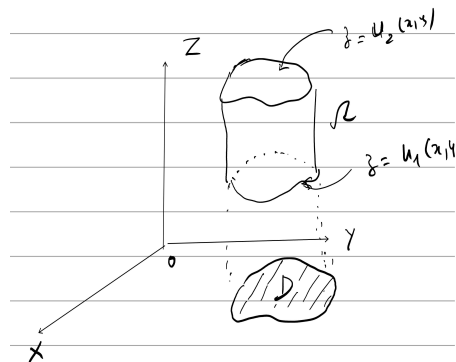
#### 4.0.4 THÉORÈME (THÉORÈME DE FUBINI EN PILES (VERTICALES))

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $\Omega$ , un domaine bornée (à bord régulier) de l'espace décrit en "pile" au dessus d'un domaine régulier  $D \subset \mathbb{R}^2$  :

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \text{ et } u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

où  $D$  est un domaine du plan,  $u_1$  et  $u_2$  sont des fonctions continues sur  $D$ .  
Alors

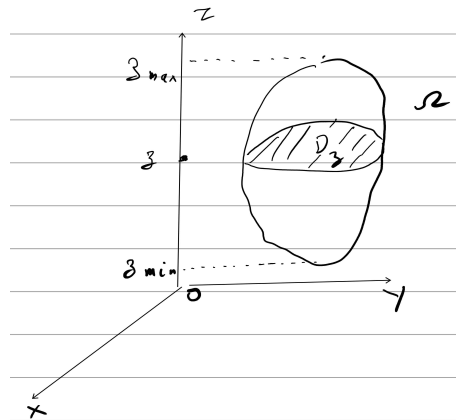
$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy}$$



## 4.0.5 REMARQUE

Le domaine  $D$  est la projection orthogonale de  $\Omega$  sur le plan  $xOy$  (c'est l'ombre de  $\Omega$  sur l'axe  $xOy$ , quand il est éclairé par dessus)

## 4.0.6 THÉORÈME (THÉORÈME DE FUBINI EN TRANCHES OU COUCHES ( HORIZONTALS))



Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $\Omega$ , un domaine bornée (à bord régulier) de l'espace décrit en "tranche"

$$\Omega = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1 \leq z \leq z_2 \text{ et } (x, y) \in D_z \}$$

où pour tout  $z$ , la tranche  $D_z = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in \Omega \}$  (l'intersection de  $\Omega$  avec le plan de hauteur  $z$  parallèle à  $xOy$ ) est un domaine régulier du plan.

Alors

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{z_1}^{z_2} \left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

Application au calcul de volume : Lorsque  $f = 1$ , on sait que  $\iiint_{\Omega} dx dy dz = \text{Volume}(\Omega)$

Les énoncés précédents donnent donc deux méthodes de calculs des volumes.

## 4.0.7 COROLLAIRE

1) Volume en piles,

$$\text{Volume}(\Omega) = \iint_D (u_2(x, y) - u_1(x, y)) dx dy.$$

2) Volume en tranches,

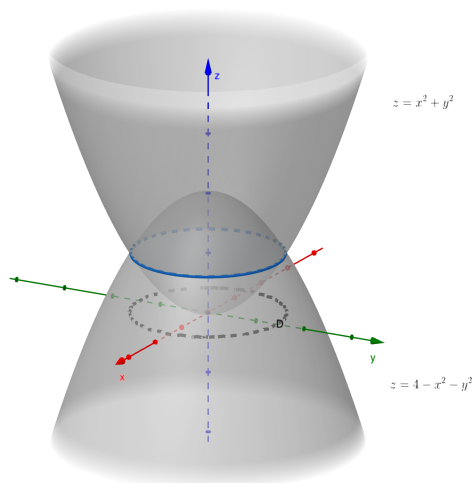
$$\text{Volume}(\Omega) = \int_a^b \left( \iint_{D_z} dx dy \right) dz = \int_a^b \text{Aire}(D_z) dz.$$

### Exemples de calcul d'intégrales triples

4.0.8 EXEMPLE. Soit le parallélépipède  $V = [0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3]$ , alors

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2 - 2yz) dx dy dz &= \int_2^3 \left( \int_1^2 \left( \int_0^1 (x^2 - 2yz) dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_2^3 \left( \int_1^2 \left[ \frac{1}{3} x^3 - 2xyz \right]_{x=0}^{x=1} dy \right) dz \\ &= \int_2^3 \left( \int_1^2 \left( \frac{1}{3} - 2yz \right) dy \right) dz = \int_2^3 \left[ \frac{1}{3} y - y^2 z \right]_{y=1}^{y=2} dz \\ &= \int_2^3 \left( \frac{2}{3} - 4z - \frac{1}{3} + z \right) dz = \int_2^3 \left( \frac{1}{3} - 3z \right) dz \\ &= \left[ \frac{1}{3} z - \frac{3}{2} z^2 \right]_{z=2}^{z=3} = \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{15}{2} = \boxed{-\frac{43}{6}} \end{aligned}$$

4.0.9 EXEMPLE. On se propose de calculer le volume du domaine borné  $\Omega$ , déterminé par les paraboloïdes d'équations  $z = x^2 + y^2$  et  $z = 4 - x^2 - y^2$ .  
On a  $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2)\}$ .  
La projection  $D$  de  $\Omega$  sur le plan  $xOy$  est donnée par l'inégalité  $x^2 + y^2 \leq 4 - (x^2 + y^2)$  i.e.  $x^2 + y^2 \leq 2$ , d'où  $D$  est le disque centré en  $(0, 0)$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .



Pour  $(x, y)$  fixé dans  $D$ , pour  $z$ , la valeur minimale est  $z = x^2 + y^2$  et la valeur maximale est  $z = 4 - x^2 - y^2$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_D \left( \int_{x^2+y^2}^{4-(x^2+y^2)} dz \right) dx dy \\ &= \iint_D (4 - (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)) dx dy \\ &= \iint_D (4 - 2(x^2 + y^2)) dx dy. \end{aligned}$$

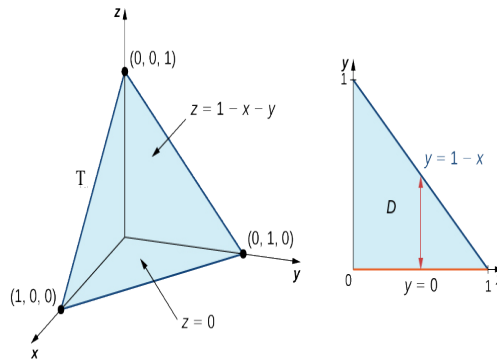
Le calcul de cette intégrale double est plus facile en coordonnées polaires. On aura

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega) &= \iint_D (4 - 2(x^2 + y^2)) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2r^2) r dr d\theta \\ &= [\theta]_0^{2\pi} \times \left[ 2r^2 - 2\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 4\pi. \end{aligned}$$

**4.0.10 EXEMPLE.** Calculer  $I = \iiint_C z dx dy dz$  sur le cube  $C = [0, 1]^3$ . Ici le domaine est en pile de hauteur constante au dessus du carré  $D = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ . D'après le théorème de Fubini, on a

$$I = \iint_D \left( \int_0^1 z dz \right) dx dy = \iint_D \frac{1}{2} dx dy = \frac{1}{2} \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \text{Aire}(D) = \frac{1}{2}.$$

4.0.11 **EXEMPLE (CALCUL DU VOLUME DU TÉTRAÈDRE STANDARD).** Calculer le volume de  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ .  $T$  est un tétraèdre plein de base le triangle  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$  et de sommet  $(0, 0, 1)$ .



1) Si on procède en piles, pour tout  $z$  on a  $u_1(x, y) = 0 \leq z \leq 1 - x - y = u_2(x, y)$  sur  $T$ , alors

$$\begin{aligned} \text{Volume}(T) &= \iint_{\Delta} (1 - x - y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left( (1-x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \left[ -\frac{(1-x)^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

#### 4.0.12 REMARQUE

On peut aussi utiliser la formule (connu depuis l'Antiquité) le volume

d'un tétraèdre est égal à  $\frac{1}{3} \times A \times h$

où  $A$  = aire d'une base et  $h$  = longueur de la hauteur issue du sommet opposé à la base.

4.0.13 **Exercice** Démontrer cette formule en utilisant l'intégrale triple.

2) Si on procède par couches (ou tranches), on constate que  $0 \leq z \leq 1$  et pour tout  $z$ , la tranche est le triangle  $T_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 - z\}$

$$\text{Volume}(T) = \int_0^1 \text{Aire}(T_z) dz = \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2} dz = \left[ -\frac{(1-z)^3}{6} \right]_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{6}.$$

### 4.0.2 Changement de variables dans une intégrale triple

**Terminologie :** Un changement de variables entre deux domaines (réguliers) bornés  $\Omega$  et  $\Omega'$  de  $\mathbb{R}^3$  est un un difféomorphisme de classe  $C^1$

$$h : \begin{array}{ccc} \Omega' & \longrightarrow & \Omega \\ (u, v, w) & \longmapsto & (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \end{array}$$

c-à-d que l'application  $h$  est une bijection de classe  $C^1$  dont l'inverse  $h^{-1}$  est aussi de classe  $C^1$ .

#### 4.0.14 DÉFINITION

La *matrice jacobienne* d'une application de classe  $C^1$  :

$$h : (u, v, w) \mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

en un point  $(u, v, w)$  est la matrice  $3 \times 3$  :

$$Jac_h(u, v, w) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} (u, v, w)$$

Le *déterminant jacobien* de  $h$  est la fonction de  $(u, v, w)$  :

$$\det Jac_h(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} (u, v, w)$$

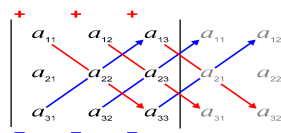
qu'on notera (parfois) par  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ .

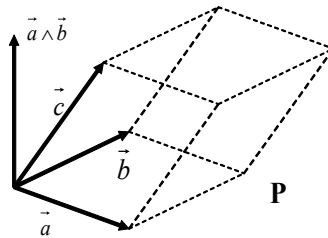
#### 4.0.15 REMARQUE

Pour une matrice carrée d'ordre 3,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  le déterminant est

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

On peut retrouver ce résultat par la règle de Sarrus : pour chacune des six diagonales ( voir figure) on associé une quantité qui est le produit de ses termes ; le déterminant de la matrice est alors égal à la somme des quantités des diagonales rouges moins la somme des quantités diagonales bleues.



**Déterminant et volume**

Soit  $\mathbf{P}$  le parallélépipède engendré par les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Alors le volume de  $\mathbf{P}$  est égal à la valeur absolue au produit mixte de ces trois vecteurs, est aussi donné par le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  : en effet


$$\begin{aligned} \text{le volume } \mathbf{P} &= |(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| x_3 \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} - y_3 \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} + z_3 \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

**4.0.16 THÉORÈME (THÉORÈME DE CHANGEMENT DE VARIABLES)**

Soient  $\Omega'$  et  $\Omega$  deux domaines bornés de  $\mathbb{R}^3$  et  $h(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  entre  $\Omega'$  et  $\Omega$ .

Alors pour toute fonction continue  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  on a

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

 **Remarque importante :** Comme pour les intégrales doubles, cette formule est aussi valable sous des conditions moins fortes. Introduisons à cet effet la notion

suivante : une partie  $C$  de  $\mathbb{R}^3$  est dite négligeable si son volume est nul.  
( par exemple un point, une droite, une sphère, plus généralement une réunion finie (même dénombrable) d'images d'applications de classe  $C^1$ , de rectangle fermé de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ .)

Voici la condition moins fortes sous lesquelles la formule de changement de variables est encore valable :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe deux parties négligeables } C \subset \Omega \text{ et } C' \subset \Omega' \text{ telle que } h \text{ est une bijection de } \Omega' - C' \text{ sur } \Omega - C \\ h \text{ est de classe } C^1 \text{ en tous les points de } \Omega' \\ \det \text{Jac}_h(u, v) \neq 0, \text{ en tout point } (u, v, w) \text{ de } \Omega' - C'. \end{array} \right.$

Alors pour toute fonction  $f$  continue sur  $\Omega$ , on a encore la formule de changement de variables :

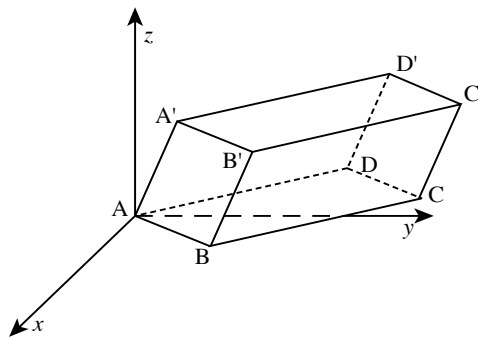
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

#### 4.0.17 THÉORÈME

Sous les hypothèses précédentes :

$$\text{volume}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega'} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

4.0.18 EXEMPLE. On va calculer l'intégrale triple  $\iiint_P x dx dy dz$  où  $P$  est le parallélépipède ayant pour sommets les points suivants :  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (1, 2, 1)$ ,  $C = (2, 3, 2)$ ,  $D = (1, 1, 1)$ ,  $A' = (1, 1, 2)$ ,  $B' = (2, 3, 3)$ ,  $C' = (3, 4, 4)$  et  $D' = (2, 2, 3)$ .



## 4.0.19 REMARQUE (EQUATION D'UN PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS NON ALIGNÉS)

L'équation d'un plan dans  $\mathbb{R}^3$  est de la forme  $ax + by + cz + d = 0$  où  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . (cette équation n'est pas unique, elle l'est à une multiplication par un scalaire : par exemple pour  $k \neq 0$ , les équations  $ax + by + cz + d = 0$  et  $kax + kby + kcz + kd = 0$  définissent le même plan.

Soient  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$  et  $C(x_3, y_3, z_3)$  trois points non alignés, alors une équation du plan passant par ces trois points est donnée par :

$$\det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} = 0.$$

En utilisant la formule précédente, on va déterminer les équations des plans engendrés par les faces du parallélépipède.

i) Le plan contenant les points A, B, C, D a pour équation  $0 = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$

$$x - z, \text{ donc } -x + z = 0.$$

De même on trouve :

ii) l'équation du plan contenant les points  $A', B', C', D'$  est  $-x + z = 1$ .

iii) Le plan contenant les points A, B,  $A', B'$  a pour équation  $3x - y - z = 0$ ,

iv) enfin, celle du plan contenant C, D,  $C', D'$  est  $3x - y - z = 1$ .

v) Le plan contenant les points A, D,  $A', D'$  a pour équation  $-x + y = 0$ ,

vi) celle du plan contenant B, C,  $B', C'$  est  $-x + y = 1$ .

Nous pouvons considérer les nouvelles coordonnées :

$$\begin{cases} u = -x + z, \\ v = 3x - y - z, \\ w = -x + y \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ceci est un changement de variables :

$$\begin{cases} x = u + v + w \\ y = u + v + 2w \\ z = 2u + v + w \end{cases} \Rightarrow h(u, v, w) = (u + v + w, u + v + 2w, 2u + v + w)$$

$$\text{et } \det Jac_h(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Dans ces nouvelles coordonnées,  $P$  correspond au cube

$$P' = \{(u, v, w) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\} = [0, 1]^3.$$

Nous avons donc, par la formule de changement de variables :

$$\begin{aligned} \iiint_P x \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{P'} (u+v+w) |1| \, du \, dv \, dw = \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 (u+v+w) \, dw \right) dv \right) du \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( u+v+\frac{1}{2} \right) dv \right) du = \int_0^1 (u+1) \, du = \left[ \frac{u^2}{2} + u \right]_0^1 = \frac{3}{2}. \square \end{aligned}$$

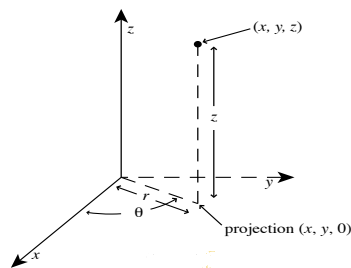
### Les coordonnées cylindriques et sphériques

Il y a plusieurs façon de représenter les points de l'espace, parmi tous ces systèmes de coordonnées, deux apparaissent souvent ; il s'agit des coordonnées cylindriques et des coordonnées sphériques. Nous allons maintenant considérer ces systèmes de coordonnées, ainsi que le changement de coordonnées pour les intégrales triples des coordonnées cartésiennes à ces coordonnées.

#### Coordonnées cylindriques

Dans  $\mathbb{R}^3$ , les coordonnées cylindriques sont utiles lorsque le problème étudié présente une symétrie autour d'un axe. Un point  $M = (x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  peut s'écrire sous la forme  $M = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$  avec  $r \geq 0$  et  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Le triplet  $(r, \theta, z)$  s'appelle les coordonnées cylindriques de  $M$ . On note

$$\begin{cases} h : [0, +\infty[ \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) & \mapsto & (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{cases}$$



## 4.0.20 THÉORÈME (PASSAGE EN COORDONNÉES CYLINDRIQUES)

Soient  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $\Omega = h(\Omega')$  (domaines réguliers). On a alors

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

*Démonstration.* On applique Fubini en tranches  $z = \text{constante}$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

et on passe en polaires sur chaque  $D_z$

$$= \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left( \iint_{D'_z} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta \right) dz = \iiint_{\Omega'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

par Fubini.  $\square$

## 4.0.21 REMARQUE

Cet énoncé est très utile pour intégrer des fonctions sur des solides de révolution : c'est-à-dire des solides invariants par rotation autour de l'axe des  $z$ . Les équations de ces domaines sont des fonctions de  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et de  $z$ .

4.0.22 EXEMPLE. Calculer  $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$  où  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2\}$ . Pour  $y = 0$ , on a  $x^2 \leq z^2$  et  $0 \leq z \leq 1$  qui est un triangle. Par conséquent  $\Omega$  est le cône plein de sommet l'origine et de base le disque  $D_1 = \{(x, y, 1), x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

La tranche  $D_z$  de  $\Omega$  est le disque de rayon  $z$ , centré en  $(0, 0, z)$ .

On obtient par passage en coordonnées cylindriques

$$\Omega = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq r \leq z\}.$$

Ainsi,

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left( \int_0^z r^3 dr \right) dz = 2\pi \int_0^1 \frac{z^4}{4} dz = 2\pi \left[ \frac{z^5}{20} \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{10}}.$$

## 4.0.23 PROPOSITION

Soit  $V$  un domaine régulier de  $\mathbb{R}^3$  tel qu'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et une fonction  $\varphi : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  continue,  $2\pi$  périodique par rapport à la première variable, et vérifiant

$$V = \{(r \cos \theta, r \sin(\theta), z), \theta \in \mathbb{R}, z \in [a, b], 0 \leq r \leq \varphi(\theta, z)\}$$

Alors pour toute fonction  $f$  continue sur  $V$  on a

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\varphi(\theta, z)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) r dr d\theta dz.$$

*Démonstration:* Pour  $z \in [a, b]$  on note  $T_z = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{z\})$ . Alors on a

$$T_z = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \mid \theta \in \mathbb{R}, 0 \leq r \leq \varphi(\theta, z)\}.$$

Puisque

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \iint_{T_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz,$$

il suffit de passer en coordonnées polaires sur chaque tranche  $T_z$ . ■

*Le passage en coordonnées cylindriques transforme l'élément de volume  $dx dy dz$  en  $r dr d\theta dz$ .*

**4.0.25 EXEMPLE.** Considérons à nouveau  $\iiint_V (1 - 2yz) dx dy dz$  où  $V$  est le cylindre de hauteur 3 et de base le disque unité  $D$ . En coordonnées cylindriques, on a

$$V = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \mid r \in ]0, 1], \theta \in [0, 2\pi[, z \in [0, 3]\}$$

ainsi

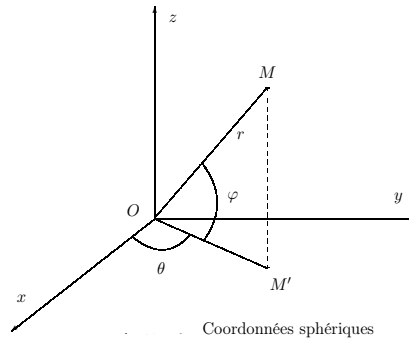
$$\begin{aligned} \iiint_V (1 - 2yz) dx dy dz &= \int_0^3 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} (1 - 2rz \sin \theta) d\theta \right) r dr \right) dz \\ &= \int_0^3 \left( \int_0^1 \left( [\theta + 2rz \cos \theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right) r dr \right) dz = \int_0^3 \left( \int_0^1 (2\pi + 2rz - 2rz) r dr \right) dz \\ &= \int_0^3 \left( \int_0^1 2\pi r dr \right) dz = 3\pi [r^2]_0^1 = 3\pi \end{aligned}$$

**4.0.26 REMARQUE**

La fonction  $(x, y, z) \mapsto 2yz$  est impaire par rapport à  $y$  et le domaine  $V$  est symétrique par rapport au plan  $xoz$ , alors  $\iiint_V 2yz dx dy dz = 0$ . Alors, le calcul de  $\iiint_V (1 - 2yz) dx dy dz$  est réduit à celui de  $\iiint_V dx dy dz = \text{Volume du cylindre } V = \text{hauteur} \times \text{Aire}(D) = 3\pi$ .

### Coordonnées sphériques

**Une définition :** un point  $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  est caractérisé par  
 sa distance à l'origine  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  
 sa longitude  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ ,  
 sa latitude  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$  vers le pôle nord,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  vers le pôle sud).



On a  $z^2 + (x^2 + y^2) = r^2$ , d'où  $z = r \sin \varphi$  et  $\sqrt{x^2 + y^2} = r \cos \varphi$  et  
 finalement  $\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$

#### 4.0.27 REMARQUE

Les coordonnées sphériques sont adaptées aux problèmes qui présentent une symétrie autour du centre du repère.

#### 4.0.28 PROPOSITION

L'application  $h : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ (r, \theta, \varphi) & \longmapsto (x, y, z) = (r \cos(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \end{cases}$   
 est un difféomorphisme de classe  $C^1$  (aka un changement de variables).

En outre pour tout  $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  on a

$$\det Jac_h(r, \theta) = r^2 \cos(\varphi).$$

Démonstration: Pour  $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi, \pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  on a

$$\begin{pmatrix} x(r, \theta, \varphi) \\ y(r, \theta, \varphi) \\ z(r, \theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

On commence par noter que les dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta) \cos(\varphi), \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \cos(\theta) \sin(\varphi),$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos(\theta) \cos(\varphi), \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r \sin(\theta) \sin(\varphi),$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \sin(\varphi), \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = r \cos(\varphi)$$

existent et sont continues, d'où  $h$  est de classe  $C^1$ .

Si  $r \cos(\varphi) \cos(\theta) = r' \cos(\varphi') \cos(\theta')$ ,  $r \cos(\varphi) \sin(\theta) = r' \cos(\varphi') \sin(\theta')$  et  $r \sin(\varphi) = r' \sin(\varphi')$  alors

$$r = \sqrt{(r \cos(\varphi) \cos(\theta))^2 + (r \cos(\varphi) \sin(\theta))^2 + (r \sin(\varphi))^2}$$

$$= \sqrt{(r' \cos(\varphi') \cos(\theta'))^2 + (r' \cos(\varphi') \sin(\theta'))^2 + (r' \sin(\varphi'))^2} = r'$$

car  $r, r' > 0$ . De ceci, nous obtenons  $\cos(\varphi) \cos(\theta) = \cos(\varphi') \cos(\theta')$ ,  $\cos(\varphi) \sin(\theta) = \cos(\varphi') \sin(\theta')$  et  $\sin(\varphi) = \sin(\varphi')$  après simplification par  $r$ . La dernière équation nous permet d'affirmer que  $\varphi = \varphi'$  car  $-\frac{\pi}{2} < \varphi, \varphi' < \frac{\pi}{2}$ . De  $\cos(\varphi) \cos(\theta) = \cos(\varphi) \cos(\theta')$ ,  $\cos(\varphi) \sin(\theta) = \cos(\varphi) \sin(\theta')$ , nous obtenons que  $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ ,  $\sin(\theta) = \sin(\theta')$  après simplification par  $\cos(\varphi) > 0$  car  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ . De cette dernière observation, nous obtenons que  $\theta = \theta'$  car  $-\pi \leq \theta, \theta' < \pi$ . Ainsi  $h$  est une fonction injective.

Finalement, le jacobien est

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \det Jac_h(r, \theta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \cos(\varphi) & -r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= (r^2 \cos^2(\theta) \cos^3(\varphi) + r^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) \sin(\varphi) + 0)$$

$$- (-r^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\varphi) \cos(\varphi) + 0 - r^2 \sin^2(\theta) \cos^3(\varphi))$$

$$= r^2 \cos^3(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi) \cos(\varphi) = r^2 \cos(\varphi) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = r^2 \cos(\varphi).$$

■

Le passage en coordonnées sphériques donne pour l'élément de volume  $dx dy dz = r^2 \cos(\varphi) dr d\theta d\varphi$ .

## 4.0.30 THÉORÈME (PASSAGE EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES)

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continues sur  $\Omega = h(\Omega')$  domaines bornés réguliers de  $\mathbb{R}^3$ . Alors on a

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi) r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi.$$

Cette formule est très utile pour intégrer des fonctions sur des secteurs angulaires de boules.

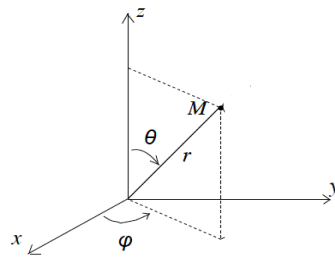
---



Attention :

Il existe plusieurs conventions pour les coordonnées sphériques (celles des mathématiciens, des physiciens, des astronomes, des géographes...). On a suivi dans ce cours la convention "rayon-longitude-latitude". Il y a d'autres conventions, par exemple "rayon-longitude-colatitude" : pour ce choix, la notation habituelle est  $\theta$  pour la colatitude, elle varie entre 0 et  $\pi$  et  $\varphi$  est la longitude. On aura dans ce cas, les coordonnées sphériques  $(r, \varphi, \theta)$  et les coordonnées du point

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$



où la longitude  $\varphi \in [0, 2\pi]$  et la colatitude  $\theta \in [0, \pi]$ . ( $\theta = 0$  vers le pôle nord,  $\theta = \pi$  vers le pôle sud). Ces coordonnées sphériques donnent (pour élément de volume)  $dxdydz = r^2 \sin \theta drd\varphi d\theta$ .

Pour s'adapter au contexte, il vaut mieux se rappeler de la méthode plutôt que d'apprendre les formules par coeur.

La formule de changement de variables devient dans ce cas :

#### 4.0.31 THÉORÈME (PASSAGE EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES ("RAYON-LONGITUDE-COLATITUDE"))

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continues sur  $\Omega = h(\Omega')$  domaines réguliers de  $\mathbb{R}^3$ . Alors on a

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta.$$

4.0.32 **EXEMPLE (VOLUME D'UNE BOULE DE RAYON  $R$ ).** Quitte à faire une translation, on peut supposer que la boule  $B_R$  de rayon  $R$  est centrée à l'origine. Elle est représentée, en coordonnées sphériques, par

$$B'_R = \left\{ (r, \theta, \varphi) \mid r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\} = [0, R] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Puisque  $dx dy dz = r^2 \cos(\varphi) dr d\theta d\varphi$  on a

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B_R) &= \iiint_{B_R} dx dy dz = \iiint_{B'_R} r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi) d\varphi \\ &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi} \times [\sin(\varphi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{3} \times 2\pi \times 2 = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

4.0.33 **EXEMPLE (CALCUL D'INTÉGRALE EN UTILISANT LES SYMÉTRIES).** .

Soit à calculer  $I = \iiint_{B_R} (ax + by + cz)^2 dx dy dz$  où  $B_R$  est la boule de centre  $O = (0, 0, 0)$  et de rayon  $R$ .

On a  $(ax + by + cz)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 + 2(abxy + acxz + bcyz)$ , d'autre part en raison des symétries du domaine  $B_R$  on aura :

$$\iiint_{B_R} xy dx dy dz = \iiint_{B_R} yz dx dy dz = \iiint_{B_R} zx dx dy dz = 0,$$

et

$$\iiint_{B_R} x^2 dx dy dz = \iiint_{B_R} y^2 dx dy dz = \iiint_{B_R} z^2 dx dy dz.$$

Alors,

$$I = (a^2 + b^2 + c^2) \iiint_{B_R} z^2 dx dy dz.$$

On utilise les coordonnées sphériques

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi.$$

le domaine  $B_R$  est transformé en  $B'_R = [0, R] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ , et  $z^2 = r^2 \sin^2 \varphi$ . La formule de changement de variables nous donne :

$$\iiint_{B_R} z^2 dx dy dz = \iiint_{B'_R} (r^2 \sin^2 \varphi) r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi = \iiint_{B'_R} r^4 \sin^2 \varphi \cos \varphi dr d\theta d\varphi.$$

Comme les variables sont séparables, on a

$$\iiint_{B_R} z^2 dx dy dz = \left( \int_0^R r^4 dr \right) \left( \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right) \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \right) = \frac{2R^5 \pi}{5} \left[ \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4R^5 \pi}{15},$$

d'où

$$I = (a^2 + b^2 + c^2) \frac{4\pi R^5}{15}.$$

### 4.0.3 Applications : Masse, centre de gravité et moment d'inertie

Il existe un grand nombre d'applications de l'intégrale multiple. Il suffit de penser aux notions d'espérance et de variance en probabilités ou encore des équations intégrales. Beaucoup de ces applications seront discutées dans d'autres cours. Ici nous n'énumérerons que quelques-unes, surtout reliées à la physique. Plusieurs quantités physiques peuvent être exprimées comme des intégrales multiples. De tels expressions sont fondées sur la définition de l'intégrale comme la limite d'une somme.

On a vu par exemple que si  $D$  est un domaine régulier de l'espace, alors

$$\text{Volume}(D) = \iiint_D dx dy dz.$$

Plus généralement, si  $D$  a une densité de masse (ou de charge)  $\rho = dq/d\text{vol}$ , alors la **masse (ou charge) totale** de  $D$  est donnée par l'intégrale

$$M(D) = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Une autre notion fondamentale en mécanique du solide est celle de **centre de gravité**  $G$  (ou centre d'inertie) d'un domaine  $D$ .

- Si  $D \subset \mathbb{R}^3$ , on a  $G = (x_G, y_G, z_G)$  où

$$x_G = \frac{1}{M(D)} \iiint_D x \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad y_G = \frac{1}{M(D)} \iiint_D y \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$z_G = \frac{1}{M(D)} \iiint_D z \rho(x, y, z) dx dy dz$$

- Si la densité  $\rho$  est constante, on dit que  $D$  est **homogène**, et les expressions se simplifient. On obtient alors

$$x_G = \frac{1}{\text{Volume}(D)} \iiint_D x dx dy dz$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Volume}(D)} \iiint_D y dx dy dz$$

$$z_G = \frac{1}{\text{Volume}(D)} \iiint_D z dx dy dz.$$

#### 4.0.34 REMARQUE

Le centre de gravité  $G$  a des propriétés physiques très importantes. Une d'entre elles est utile pour avoir l'intuition de sa position : le domaine  $D$  reste à l'équilibre s'il est posé sur son centre de gravité. A noter que  $G$  n'est pas toujours situé dans  $D$ , par exemple si  $D$  est un pneu.

Pour revenir aux notions mathématiques que nous avons abordées ici, le centre de gravité se comporte très bien par découpage des domaines. Le centre de gravité du tout est alors le barycentre des centres de gravités des morceaux. On a plus précisément : Si le domaine  $D$  se découpe en la réunion de domaines  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , alors

$$M(D)x_G = M(D_1)x_{G_1} + M(D_2)x_{G_2} + \dots + M(D_n)x_{G_n}$$

et des expressions similaires pour  $y_G$  et  $z_G$ . C'est une conséquence immédiate du découpage de l'intégrale

$$M(D)x_G = \iiint_D x\rho(x, y)dx dy = \sum_{i=1}^n \iiint_{D_i} x\rho(x, y)dx dy = \sum_{i=1}^n M(D_i)x_{G_i}.$$

On peut ainsi déterminer le centre de gravité de domaines constitués de figures géométriques simples, en tout cas en principe pour l'instant, car il nous faut d'abord avoir des outils de calculs d'intégrales multiples efficaces sur ces figures.

#### 4.0.35 REMARQUE

Notez enfin la similitude des formules valables pour un système fini de masses. En effet, la formule s'écrit aussi

$$x_G = \frac{1}{M(D)} \sum_{i=1}^n x_{G_i} M(D_i),$$

et la formule n'est que la *version continue* de cette expression, où l'on aurait découpé  $D$  en une infinité de morceaux infinitésimaux  $D_i$  de masse  $dm_i \simeq \rho dx dy$ , tout à fait dans l'esprit de découpage et d'échantillonnage des sommes de Riemann qui nous ont permis d'introduire la notion d'intégrale multiple.

#### 4.0.36 EXEMPLE. On cherche à déterminer le centre de gravité du demi-cylindre homogène $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, z \in [0, H], y \geq 0\}$ .

Dans, ce cas, il est naturel de travailler en coordonnées cylindriques et d'écrire le demi-cylindre comme

$$\tilde{\Omega} = \{(r, \theta, z) \mid r \in [0, R], \theta \in [0, \pi], z \in [0, H]\}.$$

Le calcul de la masse totale donne

$$M = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\tilde{\Omega}} r dr d\theta dz = \int_0^R r dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^H dz = \frac{\pi R^2 H}{2}.$$

- Le centre de gravité  $G$  a pour coordonnées cartésiennes

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x dx dy dz = \frac{1}{M} \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta \int_0^H dz = 0$$

(on aurait pu déduire ce résultat de la symétrie du domaine par rapport au plan  $yOz$ )

$$y_G = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y dx dy dz = \frac{1}{M} \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^H dz = \frac{2}{\pi R^2 H} \frac{R^3}{3} 2H = \frac{4R}{3\pi}$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \frac{1}{M} \int_0^R r dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^H z dz = \frac{2}{\pi R^2 H} \frac{R^2}{2} \pi \frac{H^2}{2} = \frac{H}{2}$$

Ainsi  $G = (0, \frac{4R}{3\pi}, \frac{H}{2})$ .

### Moment d'inertie

Il est aussi possible dans la situation précédente de décrire le moment d'inertie par rapport à un axe. En physique, le moment d'inertie d'un système de  $n$  particules par rapport à un axe de rotation est défini par l'équation

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$$

dans laquelle  $m_i$  est la masse et  $r_i$  est la distance à l'axe donné de la  $i$ -ième particule.

#### 4.0.37 DÉFINITION

Soit  $\rho : \Omega \rightarrow [0, +\infty[$  la densité volumique d'un matériau  $\Omega$ . Soit  $\Delta$  une droite. On note par  $r(x, y, z)$  la distance du point  $(x, y, z)$  à la droite  $\Delta$ . On appelle **Moment d'inertie** de  $\Omega$  par rapport à la droite  $\Delta$  le nombre réel

$$\iiint_{\Omega} (r(x, y, z))^2 \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

#### 4.0.38 REMARQUE

- 1) Si  $(x_{\Delta}, y_{\Delta}, z_{\Delta})$  est la projection orthogonale de  $(x, y, z)$  sur la droite  $\Delta$  alors le moment d'inertie  $I_{\Delta}(D)$  de  $\Omega$  par rapport à la droite  $\Delta$  est égal à

$$I_{\Delta}(D) = \iiint_{\Omega} ((x - x_{\Delta})^2 + (y - y_{\Delta})^2 + (z - z_{\Delta})^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

4.0.39 EXEMPLE. Soit le cylindre homogène

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, z \in [0, H]\}$$

de densité volumique  $\mu > 0$ .

- (i) On commence par calculer le moment d'inertie par rapport à son axe de révolution, l'axe  $Oz$ .

On note  $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  la distance d'un point  $(x, y, z)$  à l'axe  $Oz$ .

Comme dans l'exemple précédent, on va travailler en coordonnées cylindriques et d'écrire le cylindre comme

$$\tilde{\Omega} = \{(r, \theta, z) \mid r \in [0, R], \theta \in [-\pi, \pi], z \in [0, H]\} = [0, R] \times [-\pi, \pi] \times [0, H].$$

Le moment d'inertie de  $\Omega$  par rapport à l'axe  $Oz$  est égal à

$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \mu \iiint_{\Omega} (r(x, y, z))^2 dx dy dz = \mu \iiint_{\tilde{\Omega}} (x^2 + y^2) dx dy dz = \mu \iiint_{\tilde{\Omega}} r^3 dr d\theta dz \\ &= \mu \int_0^R r^3 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^H dz = \mu \frac{\pi R^4 H}{2}. \end{aligned}$$

- (ii) On veut maintenant calculer  $I_{\Delta}$ , le moment d'inertie du disque par rapport une droite  $\Delta$  parallèle à l'axe  $Oz$  et passant par un point de la circonférence de la base. Soit  $A = (a, b)$  un point de la circonférence du cercle; donc  $a^2 + b^2 = R^2$ . On note  $r_{\Delta}(x, y, z) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$  la distance d'un point  $(x, y, z)$  à la droite  $\Delta$ . Alors,

$$\begin{aligned} I_{\Delta} &= \mu \iiint_{\Omega} (r_{\Delta}(x, y, z))^2 dx dy dz = \mu \iiint_{\Omega} ((x - a)^2 + (y - b)^2) dx dy dz \\ &= \mu \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2) dx dy dz \\ &= \mu \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz + \mu \iiint_{\Omega} (-2ax - 2by) dx dy dz + \mu \iiint_{\Omega} (a^2 + b^2) dx dy dz \\ &= I_{Oz} + \mu \iiint_{\Omega} (-2ax - 2by) dx dy dz + \mu R^2 \text{Volume}(\Omega) \end{aligned}$$

D'autre part :  $\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \int_0^R \int_0^H (r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) d\theta) dr dz = 0$  de

même  $\iiint_{\Omega} y dx dy dz = \int_0^R \int_0^H (r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta) d\theta) dr dz = 0$ .

Par suite  $\mu \iiint_{\Omega} (-2ax - 2by) dx dy dz = 0$ . Ainsi,

$$I_{\Delta} = I_{Oz} + \mu R^2 \text{Volume}(\Omega) = \mu \frac{\pi R^4 H}{2} + \mu R^2 (\pi R^2 H) = \mu \frac{3\pi R^4 H}{2} = 3I_{Oz}.$$

Ce calcul montre qu'il y a 3 fois plus de résistance à faire tourner le cylindre autour d'une droite parallèle à  $Oz$  et passant par un point de sa circonférence qu'en son axe de révolution.

## Troisième partie

# Intégrale curviligne et intégrale de surface

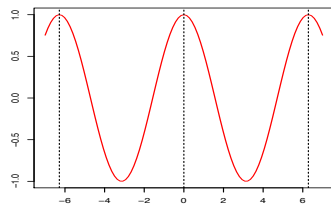
# Chapitre 5

## Intégrale curviligne

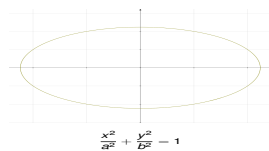
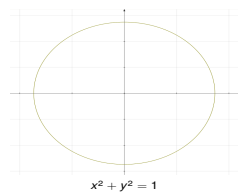
### 5.1 Courbes paramétrées

Il existe plusieurs façons mathématiques de décrire formellement la notion de courbe. En voilà trois :

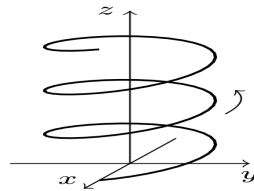
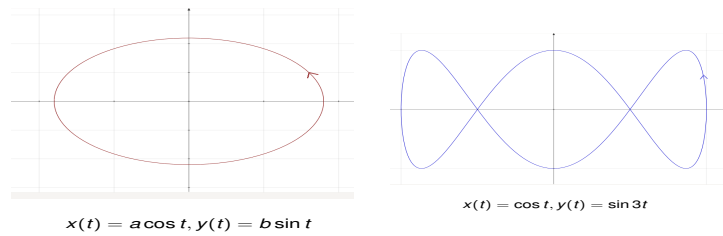
- au moyen des graphes de fonctions d'une variable



- au moyen d'équations implicites : on parle alors de courbes définies implicitement



- au moyen d'un paramètre, le temps  $t$  : on parle alors de courbes paramétrées



$$x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = t$$

Dans ce chapitre, on donne la préférence aux courbes paramétrées (elles s'ex-priment facilement en toute dimension).

### 5.1.1 DÉFINITION

Une **courbe paramétrée** est une fonction vectorielle ( de classe  $C^1$ )

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

Le **support** de la courbe paramétrée est le lieu des points

$$C = \{\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in [a, b]\},$$

- Une courbe paramétrée est naturellement **orientée** par le sens croissant du paramètre  $t$ . On note dans ce cas le support par  $C^+$  et on dit qu'il est orienté dans le sens direct (ou positif).
- Le support de  $\gamma$  **parcouru dans le sens inverse** (ou négatif) est noté  $-\gamma$  (son support est noté  $C^-$  ou  $-C$ ) il est par exemple paramétré par  $\tilde{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  définie par  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$ .
- On dit que la courbe  $\gamma$  est **fermée** lorsque son origine coïncide avec son extrémité si  $I = [a, b]$  et  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .
- On dit que la courbe  $\gamma$  est **simple** lorsque  $I = [a, b]$ ,  $t, t' \in ]a, b[$ ,

$$t \neq t' \implies \gamma(t) \neq \gamma(t').$$

- On appelle **vecteur vitesse** la dérivée première de  $\gamma$  :

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t))$$

### 5.1.2 DÉFINITION

Une courbe paramétrée  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite **régulière** si pour tout  $t \in I$ ,

$$\|\gamma'(t)\| \neq 0$$

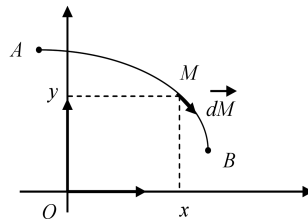
autrement dit, si son vecteur vitesse ne s'annule jamais. La droite passant par  $\gamma(t)$  et de vecteur directeur  $\gamma'(t)$  est appelée la **droite tangente** en  $t$  à  $\gamma$ .

### Longueur de courbe paramétrée

Soit un arc de courbe  $AB$ , paramétré par

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

On considère un point  $M$  qui se déplace le long de la courbe de  $A$  à  $B$ , par déplacements infinitésimaux  $\overrightarrow{dM}$ .



Chacun de ces déplacements a une longueur égale à  $\|\overrightarrow{dM}\|$ , et la longueur totale  $L$  de l'arc  $\widehat{AB}$  est la somme de ces longueurs infinitésimales. Donc

$$L = \int_A^B \|\overrightarrow{dM}\|$$

Si on travaille en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{dx_1} + \overrightarrow{dx_2} + \dots + \overrightarrow{dx_n}.$$

Il en résulte immédiatement que,

$$L_A^B = \int_A^B \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}.$$

On a  $A = \gamma(a)$  et  $B = \gamma(b)$ , comme  $dx_i = x'_i(t)dt$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  alors

$$L_A^B = \int_A^B \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2} = \int_a^b \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2 + \cdots + (x'_n(t))^2} dt.$$

Ainsi la longueur de la courbe  $\gamma$  entre  $A$  et  $B$  est donnée par la formule

$$L_A^B(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2 + \cdots + (x'_n(t))^2} dt$$

**5.1.3 EXEMPLE.** Soit  $\gamma(t) = (t, t, t)$  avec  $t \in [0, 1]$ .

Puisque  $\gamma(t) = (t, t, t)$ , on a  $\gamma'(t) = (1, 1, 1)$  d'où

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \neq 0.$$

Ainsi  $\gamma$  est régulière.

**5.1.4 EXEMPLE.** Soit  $\gamma(t) = (3 \cos t, 0, 2 \sin t)$  avec  $t \in [0, 2\pi]$ . On a  $x(t)/3 = \cos t$ ,  $y(t) = 0$  et  $z(t)/2 = \sin t$ , ainsi le support de la courbe est l'ellipse contenue dans le plan  $\{y = 0\}$ ,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Puisque  $\gamma(t) = (3 \cos t, 0, 2 \sin t)$ , on a

$$\gamma'(t) = (-3 \sin t, 0, 2 \cos t)$$

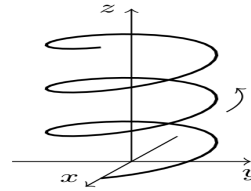
d'où

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} \neq 0$$

Ainsi  $\gamma$  est régulière.

**5.1.5 EXEMPLE.** Soit  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$  avec  $t \in [0, 6\pi]$ .

On a  $x^2(t) + y^2(t) = 1$ , le support de la courbe est contenue dans un cylindre de base un cercle unité. La hauteur  $z(t)$  est le paramètre angulaire.



Le support de la courbe est donc une hélice.

Puisque  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ , on aura  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$  par suite

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

ainsi la courbe  $\gamma$  est régulière.

- La longueur de  $\gamma$  entre 0 et  $2\pi$  vaut

$$L_0^{2\pi}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi$$

### 5.1.6 REMARQUE (LONGUEUR DE COURBE PARAMÉTRÉE EN COORDONNÉES POLAIRES)

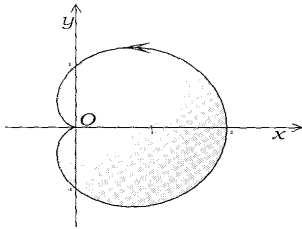
Soit  $\gamma$  une courbe définie en coordonnées polaires par :  $\rho = \rho(\theta)$  avec  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ . On a  $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta) \cos(\theta), \rho(\theta) \sin(\theta))$  en dérivant on obtient  $\gamma'(\theta) = (\rho'(\theta) \cos(\theta) - \rho(\theta) \sin(\theta), \rho'(\theta) \sin(\theta) + \rho(\theta) \cos(\theta))$ , par suite

$$\begin{aligned} \|\gamma'(\theta)\|^2 &= x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = (\rho'(\theta) \cos(\theta) - \rho(\theta) \sin(\theta))^2 + (\rho'(\theta) \sin(\theta) + \rho(\theta) \cos(\theta))^2 \\ &= \rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2. \end{aligned}$$

D'où la longueur de la courbe :

$$L_{\theta_1}^{\theta_2}(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2} d\theta$$

**5.1.7 Exercice** Soit à calculer la longueur de la cardioïde  $\gamma$  d'équation en coordonnées polaires  $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$  avec  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .



$$\begin{aligned} \text{On a } L_{-\pi}^{\pi}(\gamma) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(-\sin(\theta))^2 + (1 + \cos(\theta))^2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos(\theta)} d\theta = \\ &= \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + \cos(\theta)} d\theta = \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta \end{aligned}$$

$$= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| d\theta = 2 \left[ 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]_{-\pi}^{\pi} = 8.$$

## 5.2 Intégrales curvilignes d'une forme différentielle et circulation d'un champ de vecteurs

On va commencer par définir maintenant les objets à intégrer sous deux formes.

### 5.2.1 DÉFINITION

Une **forme différentielle**  $\omega$  ( de degré 1) sur un domaine  $D$  est une expression de la forme :

$$\omega(x) = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n$$

où pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_i$  est une fonction de classe  $C^1$  dans  $D \subset \mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Par exemple, on notera

1. (en dimension  $n = 2$ ):  $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  où  $P$  et  $Q$  sont des fonctions de classe  $C^1$  de  $D \subset \mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
2. (en dimension  $n = 3$ ):  $\omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$  où  $P, Q$  et  $R$  sont des fonctions de classe  $C^1$  de  $D \subset \mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

5.2.2 EXEMPLE. Soient  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ . Alors sa différentielle

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dz$$

est une forme différentielle ( de degré 1) sur le domaine  $D$ .

---

### 5.2.3 DÉFINITION

On associe à la forme différentielle  $\omega$  le **champ de vecteurs**  $\vec{V}$  défini sur  $D$  à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  par :

$$\vec{V}(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$$

où pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_i$  est une fonction de classe  $C^1$  dans  $D \subset \mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Par exemple, on notera

1.  $\vec{V}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  (en dimension  $n = 2$ )

$$2. \vec{V}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k} \text{ (en dimension } n = 3)$$

5.2.4 REMARQUE

Le champ de vecteur associé à la différentielle  $df$  est le gradient  $\overrightarrow{\text{grad}} f$ .

5.2.5 DÉFINITION

1) La forme différentielle  $\omega$  est dite **exacte** (ou **totale**) s'il existe une fonction  $f$  de classe  $C^2$  de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\omega = df$$

et la version correspondante pour les champs de vecteurs :

2) Un champ de vecteurs  $\vec{V}$  est un **champ de gradient (ou dérive d'un potentiel)** s'il existe une fonction  $f$  de classe  $C^2$  de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$$

5.2.6 DÉFINITION

1) Une forme différentielle  $\omega(x) = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n$  est dite **fermée** si pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ .

Par exemple en dimension 3 : une forme différentielle  $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$  est dite **fermée** si  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$  et  $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$ .

2) Un champ de vecteurs  $\vec{V}(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$  est dit **irrotationnel** sur  $D$  si pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ .

Par exemple en dimension 3 : un champ de vecteurs  $\vec{V}$  est dit **irrotationnel** sur  $D$  si son rotationnel est nul ( $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$ ) sur  $D$ .

$$\text{où } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

que nous pouvons écrire formellement  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$

### 5.2.7 REMARQUE (IMPORTANTE)

Une condition **nécessaire** pour qu'une forme différentielle  $\omega$  soit exacte (resp. pour qu'un champ de vecteurs  $\vec{V}(x, y, z)$  soit un champ de gradient) est qu'elle soit fermée ( resp. qu'il soit irrotationnel).

C'est une application du lemme de Schwarz, qui dit que pour une fonction de classe  $C^2$ , les dérivées partielles secondes ne dépendent pas de l'ordre de dérivation : c-à-d pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Cette condition n'est en général pas suffisante.

### 5.2.8 DÉFINITION (INTÉGRALE CURVILIGNE)

Soit  $\gamma$  **une courbe paramétrée** (de classe  $C^1$ )

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

de support  $C = \{\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in [a, b]\}$ , contenu dans  $D$  et  $\omega(x) = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n$  **une forme différentielle** ( de degré 1) sur  $D$ .

L'**intégrale curviligne** de  $\omega$  le long de  $\gamma$  est le nombre réel :

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b (a_1(\gamma(t))x_1'(t) + \dots + a_n(\gamma(t))x_n'(t)) dt$$

Par exemple en dimension 3 : l'**intégrale curviligne** d'une forme différentielle de classe  $C^1$ ,

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

le long de la courbe  $\gamma$  de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [a, b]$$

est le nombre réel :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt$$

La version en dimension 2, s'obtient en ôtant la variable  $z$  et la composante  $R$  c-à-d :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

où  $\gamma$  est de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a, b]$ .

Si  $\gamma$  est une courbe **fermée** (c-à-d  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ), on notera aussi dans ce cas, l'intégrale curviligne de  $\omega$  le long de la courbe  $\gamma$  par

$$\oint_{\gamma} \omega$$

**5.2.9 EXEMPLE.** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  la courbe définie par  $\gamma(t) = (2t + 1, t, 3t - 1)$  et  $\omega = -zdx + xdy + ydz$ . On va calculer l'intégrale curviligne  $\int_{\gamma} \omega$ .

On a  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (2, 1, 3)$  et par suite

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 (-(3t - 1)(2) + (2t + 1)(1) + t(3))dt = \int_0^1 (-t + 3)dt = \frac{5}{2}.$$

**5.2.10 PROPOSITION**

L'intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'une courbe ne dépend que de l'orientation, pas du choix de paramétrisations équivalentes.

**5.2.11 PROPOSITION (PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES CURVILIGNES)**

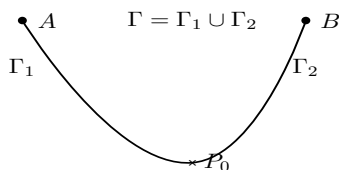
1. Si on note par  $-\gamma$  la courbe  $\gamma$  parcourue dans le sens inverse, alors :

$$\int_{-\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \omega.$$

2. Soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  deux formes différentielles,  $a$  et  $b$  deux nombres réels, alors

$$\int_{\gamma} a\omega_1 + b\omega_2 = a \int_{\gamma} \omega_1 + b \int_{\gamma} \omega_2.$$

3. (Relation de Chasles) Soit  $P_0$  un point de la courbe  $\Gamma$ , à partir de  $P_0$  on décompose  $\Gamma$  en deux courbes d'extrémités  $P_0$ , notons les  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , alors :  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  et  $\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega$ .



**5.2.12 EXEMPLE.** L'intégrale curviligne de la forme différentielle  $\omega(x, y, z) = zdx - ydy + xdz$  le long de l'arc d'hélice  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$  avec  $t \in [0, 2\pi]$  est égale à :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} \left( t \frac{d(\cos t)}{dt} - \sin t \frac{d(\sin t)}{dt} + \cos t \frac{dt}{dt} \right) dt = \int_0^{2\pi} (-t \sin t - \sin t \cos t + \cos t) dt \\ &= [t \cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t dt - \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos t dt = 2\pi - \left[ \frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

On peut aussi retrouver ce résultat, en remarquant que la forme différentielle  $\gamma$  est exacte, en effet  $\omega = df$  où  $f(x, y, z) = xz - \frac{y^2}{2}$  par suite le théorème précédent nous donne :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} df = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(1, 0, 2\pi) - f(1, 0, 0) = 2\pi.$$

**5.2.13 Exercice** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle  $\omega(x, y) = -ydx + xdy$  le long de  $\gamma(t) = (t, t^n)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

*Le théorème suivant est une généralisation du théorème fondamental du calcul intégral*

**5.2.14 THÉORÈME (LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'INTÉGRALE CURVILIGNE)**

L'intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte (ou totale)  $\omega = df$  ne dépend que des extrémités  $\gamma(a)$  et  $\gamma(b)$  de la courbe  $\gamma$ , on a :

$$\boxed{\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}$$

En particulier, si  $\gamma$  est une courbe fermée (c-à-d  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ) alors,

$$\boxed{\oint_{\gamma} df = 0.}$$

*Démonstration:* En donne la preuve pour le cas  $n = 3$ , le cas général s'obtient de la même manière. Par le théorème de dérivation des fonctions composées on a :

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t)dt + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right) dt \\
 &= \int_a^b \frac{df(\gamma(t))}{dt} dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

### 5.2.1 Circulation (ou travail) d'un champ de vecteurs

Mathématiquement, il n'y a rien de nouveau dans cette partie par rapport à la précédente : seul le point de vue et les notations changent

Soit  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée de classe  $C^1$ , et soit  $V : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs continu. D'un point de vue physique, on se représente  $\gamma(t)$  comme étant la position d'une particule à l'instant  $t$ , qui se déplace sous l'influence du champ de forces  $\vec{V}$  (ainsi  $\vec{V}(\gamma(t))$  est la force agissant sur la particule à l'instant  $t$ ). L'intégrale curviligne du champ de vecteurs le long de la courbe  $\gamma$ , notée  $\int_{\gamma} V$ , est par définition le travail effectué par ce champ de forces pour déplacer la particule le long de la courbe de  $\gamma(a)$  à  $\gamma(b)$ . Mathématiquement, cela se traduit de la manière suivante

#### 5.2.16 DÉFINITION

Soient  $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  et  $\gamma : [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée.

On appelle **circulation (ou travail)** de  $\vec{V}$  le long de  $\gamma$  l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma} \vec{V} := \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

où  $\vec{V}(\gamma(t))$  indique que le champ  $\vec{V}$  est évalué sur les points de la courbe et  $\cdot$  désigne le produit scalaire entre vecteurs.

- Si  $\gamma$  est une courbe fermée, la circulation de  $\vec{V}$  le long de  $\gamma$  s'écrit aussi

$$\oint_{\gamma} \vec{V}.$$

5.2.17 REMARQUE (IMPORTANTE)

Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteurs et  $\omega$  la forme différentielle associée alors la circulation (ou travail) de  $\vec{V}$  le long de toute courbe  $\gamma$  est égal à l'intégrale curviligne de  $\omega$  le long de  $\gamma$

$$\int_{\gamma} \vec{V} = \int_{\gamma} \omega$$

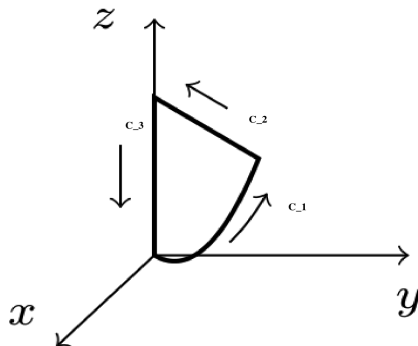
Les propriétés suivantes du travail d'un champ de vecteurs sont des traductions de celles de l'intégrale curviligne.

5.2.18 PROPOSITION (PROPRIÉTÉS)

Les principales propriétés sont :

- 1)  $\int_{-\gamma} \vec{V} = - \int_{\gamma} \vec{V}$ .
- 2)  $\int_{\gamma} (a \vec{V}_1 + b \vec{V}_2) = a \int_{\gamma} \vec{V}_1 + b \int_{\gamma} \vec{V}_2$ .
- 3)  $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \vec{V} = \int_{\gamma_1} \vec{V} + \int_{\gamma_2} \vec{V}$ .

5.2.19 EXEMPLE. Calcul de la circulation du champ de vecteurs  $\vec{V}(x, y, z) = z \vec{i} - y \vec{j} + x \vec{k}$  le long de la courbe fermée  $C^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+$



- La circulation du champ  $\vec{V}(x, y, z) = z \vec{i} - y \vec{j} + x \vec{k}$  le long de la parabole  $C_1^+ : \gamma_1(t) = (t, t, t^2) \ t \in [0, 1]$  est :

$$\int_{C_1^+} \vec{V} \cdot d\gamma = \int_0^1 (t^2, -t, t) \cdot (1, 1, 2t) dt = \int_0^1 t^2 - t + 2t^2 dt = \int_0^1 3t^2 - t dt = [t^3 - \frac{t^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$$

- La circulation de  $\vec{V}(x, y, z) = z\vec{i} - y\vec{j} + x\vec{k}$  le long du segment  $C_2^+$  :  $\gamma_2(t) = (1-t, 1-t, 1) \ t \in [0, 1]$  est :

$$\int_{C_2^+} \vec{V} = \int_0^1 (1-t, 1-t, 1) \cdot (-1, -1, 0) dt = \int_0^1 -1 - (t-1) dt = \int_0^1 -t dt = \left[-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}.$$

- Enfin, la circulation de  $\vec{V}(x, y, z) = z\vec{i} - y\vec{j} + x\vec{k}$  le long du segment  $C_3^+$  :  $\gamma_3(t) = (0, 0, 1-t) \ t \in [0, 1]$  est :

$$\int_{C_3^+} \vec{V} = \int_0^1 (1-t, 0, 0) \cdot (0, 0, -1) dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

- En conclusion, la circulation de  $\vec{V}$  le long de la courbe fermée  $C^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+$  vaut :

$$\int_{C^+} \vec{V} = \int_{C_1^+} \vec{V} + \int_{C_2^+} \vec{V} + \int_{C_3^+} \vec{V} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0.$$

5.2.20 **Exercice** Montrer que la circulation du champ de vecteurs  $\vec{V}(x, y) = (x^2y, y^3)$  le long du segment  $I$  d'origine  $(0, 0)$  et d'extrémité  $(1, 1)$  est égale à  $\frac{1}{2}$ .

## 5.2.2 Circulation (ou travail) d'un champ de gradient

### 5.2.21 DÉFINITION

Un champ de vecteurs  $\vec{V}$  est un champ de gradient (ou dérive d'un potentiel) s'il existe  $f$  de classe  $C^2$  de  $D$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ .

5.2.22 **EXEMPLE.** 1)  $\vec{V}(x, y) = (y, x)$  est un champ de gradient sur  $D = \mathbb{R}^2$ , on peut prendre  $f(x, y) = xy$ .

2)  $\vec{V}(x, y, z) = (y + z + \frac{1}{x}, x + z + \frac{1}{y}, x + y + \frac{1}{z})$  est un champ de gradient sur  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$ . En effet,  $\vec{V}(x, y, z)$  est le gradient de la fonction  $f(x, y, z) = xy + yz + zx + \ln(x) + \ln(y) + \ln(z)$  (à vérifier)

3)  $\vec{V}(x, y, z) = (x, x, x)$  n'est pas un champ de gradient. En effet,  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = (0, 1, 1) \neq \vec{0}$ .

5.2.23 **Exercice** Montrer que le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x, y, z) = (ax + by + cz) \vec{i} + (dx + ey + fz) \vec{j} + (gx + hy + iz) \vec{k}$$

est irrotationnel sur  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  est symétrique. Montrer que dans ce cas  $\vec{V}$  est un champ de gradient.

*Dans le cadre des champs de vecteurs, le théorème suivant est une traduction du théorème fondamental de l'intégrale curviligne*

5.2.24 **THÉORÈME (LE THÉORÈME FONDAMENTAL DES CHAMPS DE GRADIENTS)**

Soit  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$  un champ de gradient de domaine  $D$ , alors

- La circulation de  $\overrightarrow{\text{grad}} f$  le long d'une courbe  $\gamma$  contenue dans  $D$  joignant deux points  $A$  et  $B$  ne dépend pas de la courbe mais seulement des valeurs de  $f$  aux points  $A$  et  $B$  (on dit qu'un champ de gradient est conservatif). On a

$$\int_{\gamma} \overrightarrow{\text{grad}} f = f(B) - f(A).$$

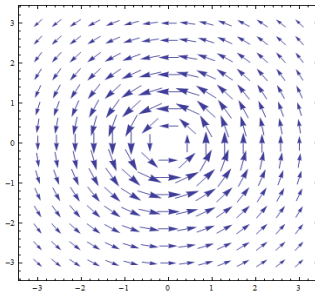
- En particulier, la circulation de  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$  le long d'une courbe fermée  $C$  est nulle

$$\oint_{\gamma} \overrightarrow{\text{grad}} f = 0.$$

5.2.25 **EXEMPLE.** Le champ vecteur  $\vec{V}(x, y, z) = z \vec{i} - y \vec{j} + x \vec{k}$  est un champ de gradient. En effet,  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$  où  $f(x, y, z) = xz - \frac{y^2}{2}$ , ainsi la circulation le long de la courbe fermée de l'exercice 5.2.19 est nulle (on retrouve facilement le résultat).

5.2.26 **EXEMPLE.** Calculons la circulation du  $\vec{V}(x, y, z) = (-y, x, 0) = -y \vec{i} + x \vec{j}$  le long du cercle  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , on aura

$$\oint_{\gamma} \vec{V} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$



Le champ de vecteurs  $\vec{V}$  tourne autour de l'origine

On en déduit que le champ de vecteurs  $\vec{V}$  n'est pas un champ de gradient, puisque sa circulation le long d'une courbe fermée n'est pas nulle.

On aurait pu aussi remarquer que, comme  $\text{rot}(\vec{V}) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = 2\vec{k}$  n'est pas nul,  $\vec{V}$  n'est pas un champ de gradient.

5.2.27 **EXEMPLE.** Maintenant, on va à partir du champ de l'exemple précédent, en modifiant son amplitude, obtenir **un champ de vecteurs irrotationnel mais qui n'est pas un champ de gradient.**

**Ceci montre que la condition nécessaire ( $\text{rot} = \vec{0}$ ) pour avoir un champ de gradient n'est pas suffisante.**

Soit  $\vec{W}$  de classe  $C^1$  défini sur  $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$  par

$$\vec{W}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j} + 0 \vec{k}.$$

1)  $\vec{W}$  est irrotationnel car

$$\text{rot}(\vec{W}) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) \right) \vec{k} = \vec{0}.$$

- 2) On va maintenant calculer le travail du champ  $\vec{W}$  le long du cercle unité du plan  $xOy$ , orienté dans le sens trigonométrique. Une paramétrisation est donnée par  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , avec  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ . On aura ainsi,

$$\oint_{\gamma} \vec{W} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

On peut en déduire que  $\vec{W}$  n'est pas un champ de gradient puisque sa circulation le long de la courbe fermée  $\gamma$  n'est pas nulle. Le champ de vecteurs  $\vec{W}$  tourne autour de l'axe  $Oz$  qui n'est pas contenu dans le domaine  $D$ .

En fait, ici le domaine  $D$  est assez particulier, par exemple le centre du cercle  $\gamma$  n'est pas dans le domaine. On verra dans ce qui suit, que si le domaine "n'a pas de trous" alors la condition nécessaire ( $\text{rot} = \vec{0}$ ) est aussi suffisante.

**5.2.28 Exercice** Soit  $\vec{V}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ . Calculer l'intégrale curviligne de  $V$  le long des courbes suivantes :

- 1)  $C_1 : x = t, y = 2t, t \in [0, 1]$
- 2)  $C_2 : x = t, y = 2t^2, t \in [0, 1]$
- 3)  $C = C_3 \cup C_4$  où  $C_3 : x = 0, y = t, t \in [0, 2]$  et  $C_4 : x = t, y = 2, t \in [0, 1]$

### 5.2.3 Primitive d'une forme différentielle (potentiel d'un champ de vecteurs)

*On a vu ( voir exemple 5.2.27) que la condition nécessaire ( $\text{rot} = \vec{0}$ ) pour qu'un champ de vecteurs sur un domaine  $D$  soit un champ de gradients n'est pas suffisante. Pour que pour cette condition nécessaire soit aussi suffisante, il faudrait que le domaine  $D$  "n'ait pas de trous" ( on va donner dans ce qui suit une classe d'ensembles qui n'ont pas de trous).*

#### 5.2.29 DÉFINITION

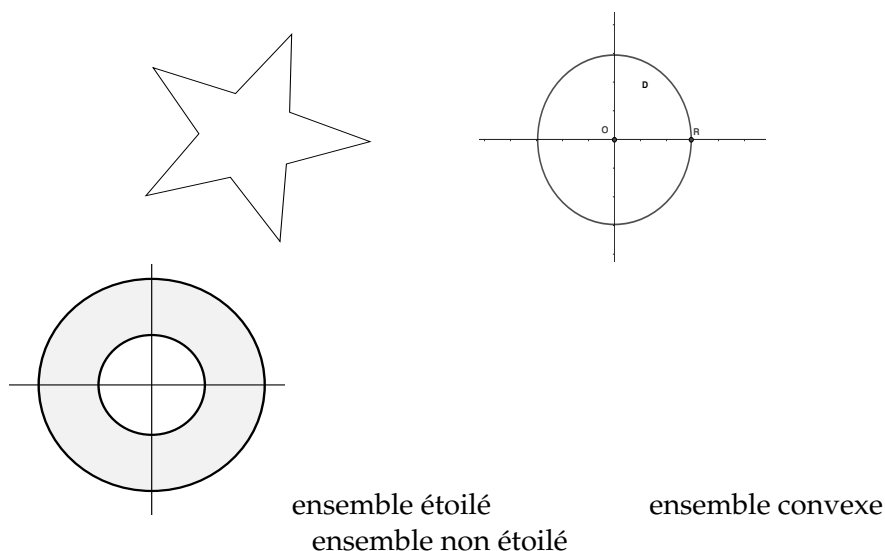
- 1) Soit  $\omega$  une forme différentielle ( de degré 1) sur  $D$ . Une primitive de  $\omega$  est une fonction différentiable  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\omega = d\phi$ .
  - 2) Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteurs sur  $D$ . Un potentiel de  $\vec{V}$  est une fonction différentiable  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ .
-

5.2.30 DÉFINITION

Un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit **étoilé** s'il existe un point  $a \in D$  tel que pour tout point  $p \in D$ , le segment joignant  $a$  à  $p$  est contenu dans  $D$ .

On rappelle que le segment  $[a, p]$  est par définition l'ensemble

$$[a, p] := \{a + t(p - a) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$



- 5.2.31 EXEMPLE. 1)  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ , plus généralement  $\mathbb{R}^n$  sont des ensembles étoilés.  
 2) tout disque dans  $\mathbb{R}^2$  (resp. toute boule dans  $\mathbb{R}^3$ ) est un ensemble étoilé.  
 3) tout ensemble convexe est étoilé ( en fait, il est étoilé par rapport à chacun de ses points). Par exemple,  $\mathbb{R}^n$ , les triangles, tétraèdres, disques, boules sont des ensembles convexes, donc étoilés.  
 4) Les ensembles  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$  ne sont pas étoilés.

5.2.32 THÉORÈME (DE POINCARÉ)

Soit  $D$  un domaine **étoilé** de  $\mathbb{R}^3$ .

- 1) Soit  $\omega$  une forme différentielle sur  $D$ .  
 Alors  $\omega$  est une forme différentielle totale si et seulement si  $\omega$  est une forme différentielle fermée.

- 2) Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteurs sur  $D$ .  
Alors  $\vec{V}$  est un champ de gradient si et seulement si  $\vec{V}$  est un champ irrotationnel.

*Par exemple en dimension 3 : Sur un domaine étoilé  $D$  de  $\mathbb{R}^3$  on a*

- i)  $\omega = R(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$  est une forme différentielle totale sur  $D$  si et seulement si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

- ii)  $\vec{V} = R(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$  un champ de vecteurs sur  $D$ .

Alors  $\vec{V}$  est un champ de gradient si et seulement si il est irrotationnel c-à-d si les équations suivantes sont satisfaites

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

### 5.2.33 REMARQUE

- 1) Cet énoncé est équivalent à : "sur un domaine étoilé  $D$ , une forme différentielle  $\omega$  est exacte si et seulement si elle est fermée "
- 2) En terme de champs de vecteurs : "sur un domaine étoilé  $D$ , un champ de vecteurs  $\vec{V}$  est un champ de gradient si et seulement si il est irrotationnel".

*En dimension 2, le théorème de Poincaré s'énonce comme suit :*

*Soit  $D$  un domaine étoilé de  $\mathbb{R}^2$ .*

- 1) Soit  $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  une forme différentielle sur  $D$ .

Alors  $\omega$  est une forme différentielle totale si et seulement si  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

- 2) Soit  $\vec{V} = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$  un champ de vecteurs sur  $D$ .

Alors  $\vec{V}$  est un champ de gradient si et seulement si  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

*Démonstration:* On donne la preuve en dimension 3, le cas général s'obtient sans difficultés en suivant les mêmes étapes.

On a déjà vu que les équations i sont nécessaires, il reste à montrer qu'elles sont suffisantes, on doit construire une primitive  $f$  de

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \text{ sur } D.$$

On peut supposer que  $D$  est étoilé par rapport à l'origine, en ce ramène à ce cas par translation. Comme  $D$  est étoilé par rapport à l'origine pour tout  $(x, y, z) \in D$  et tout  $t \in [0, 1]$ ,  $t(x, y, z) = (tx, ty, tz) \in D$ . On définit alors, l'application  $\varphi : D \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\varphi((x, y, z), t) = x.P(tx, ty, tz) + y.Q(tx, ty, tz) + z.R(tx, ty, tz).$$

La formule de dérivation d'une fonction composée donne :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}((x, y, z), t) = P(tx, ty, tz) + tx \frac{\partial P}{\partial x}(tx, ty, tz) + ty \frac{\partial Q}{\partial x}(tx, ty, tz) + tz \frac{\partial R}{\partial x}(tx, ty, tz).$$

Comme

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

On obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}((x, y, z), t) = P(tx, ty, tz) + tx \frac{\partial P}{\partial x}(tx, ty, tz) + ty \frac{\partial P}{\partial y}(tx, ty, tz) + tz \frac{\partial P}{\partial z}(tx, ty, tz) = \frac{d(t.P(tx, ty, tz))}{dt}$$

On trouve de la même manière que  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}((x, y, z), t) = \frac{d(t.Q(tx, ty, tz))}{dt}$  et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}((x, y, z), t) = \frac{d(t.R(tx, ty, tz))}{dt}.$$

On introduit alors la fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y, z) = \int_0^1 \varphi((x, y, z), t) dt$ .

Nous allons montrer que  $\omega$  est la différentielle de  $f$ .

$$\text{On a } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}((x, y, z), t) dt = \int_0^1 \frac{d(t.P(tx, ty, tz))}{dt} dt = [t.P(tx, ty, tz)]_0^1 =$$

$$P(x, y, z) \text{ de même on aura } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = Q(x, y, z) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = R(x, y, z)$$

ainsi  $\omega = df$  i.e.  $f$  est une primitive de  $\omega$  sur  $D$ . ■

*Maintenant, si on a un champ de vecteurs irrotationnel défini sur un domaine étoilé, d'après le théorème de Poincaré, c'est un champ de gradients. Comment déterminer un potentiel de ce champ ?*

*On va donner deux méthodes pour déterminer un potentiel. Les méthodes s'appliquent aussi à la recherche d'une primitive pour une forme différentielle fermée.*

### 5.2.4 Méthode pour déterminer une primitive d'une forme différentielle (ou un potentiel d'un champ de vecteurs)

Soit  $\vec{V}(x, y, z) = a(x, y, z) \vec{i} + b(x, y, z) \vec{j} + c(x, y, z) \vec{k}$  tel que  $\text{rot } \vec{V} = 0$

et cherchons  $\phi$  tel que  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$  c-à-d  $\frac{\partial\phi}{\partial x} = a$ ,  $\frac{\partial\phi}{\partial y} = b$  et  $\frac{\partial\phi}{\partial z} = c$ .

On a  $\frac{\partial\phi}{\partial x} = a \implies \phi(x, y, z) = \int a(x, y, z)dx + g(y, z)$

puis

$\frac{\partial\phi}{\partial y} = b \implies b = \int \frac{\partial a}{\partial y}dx + \frac{\partial g}{\partial y} \implies \frac{\partial g}{\partial y} = b - \int \frac{\partial a}{\partial y}dx \implies g =$

$\int bdy - \iint \frac{\partial a}{\partial y}dxdy + h(z)$  et donc  $\phi(x, y, z) = \int adx + \int bdy - \iint \frac{\partial a}{\partial y}dxdy + h(z)$ .

Enfin,  $\frac{\partial\phi}{\partial z} = c \implies c = \int \frac{\partial a}{\partial z}dx + \int \frac{\partial b}{\partial z}dy - \iint \frac{\partial^2 a}{\partial z\partial y}dxdy + \frac{\partial h}{\partial z}$

$\implies \frac{\partial h}{\partial z} = c - \int \frac{\partial a}{\partial z}dx - \int \frac{\partial b}{\partial z}dy + \iint \frac{\partial^2 a}{\partial z\partial y}dxdy$

d'où

$h = \int cdz - \iint \frac{\partial a}{\partial z}dxdz - \iint \frac{\partial b}{\partial z}dydz + \iiint \frac{\partial^2 a}{\partial z\partial y}dxdydz$ . On remplace

$h$  dans  $\phi(x, y, z) = \int adx + \int bdy - \iint \frac{\partial a}{\partial y}dxdy + h(z)$  pour obtenir finalement :

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \int adx + \int bdy + \int cdz - \int \left( \int \frac{\partial a}{\partial y}dx \right) dy - \int \left( \int \frac{\partial a}{\partial z}dx \right) dz - \int \left( \int \frac{\partial b}{\partial z}dy \right) dz \\ & + \int \left( \int \left( \int \frac{\partial^2 a}{\partial z\partial y}dx \right) dy \right) dz. \end{aligned}$$

5.2.35 EXEMPLE. Soit  $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  défini par

$$\vec{V}(x, y, z) = 2xy \vec{i} + (x^2 + z) \vec{j} + y \vec{k}$$

Un simple calcul montre que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = 0$  et puisque  $D = \mathbb{R}^3$  est convexe donc étoilé, le théorème de Poincaré assure l'existence de  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ .

1) **Par intégration du système :** 
$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 + z \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = y \end{cases}$$

On a  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \phi(x, y, z) = \int 2xy dx + g(y, z) = x^2 y + g(y, z)$ . On en déduit  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y}$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + z$  ce qui impose donc  $\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = z$  d'où  $g(y, z) = \int z dy + h(z) = zy + h(z)$ . En reportant dans l'expression de  $\phi$  on obtient

$$\phi(x, y, z) = x^2 y + zy + h(z).$$

Ainsi  $\frac{\partial \phi}{\partial z} = y + h'(z)$ . La troisième équation impose  $\frac{\partial \phi}{\partial z} = y$  d'où  $h'(z) = 0$  c-à-d  $h$  est constante. On peut choisir cette constante égale à 0 car

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi = \overrightarrow{\text{grad}} (\phi + Cte).$$

Finalement,  $\phi(x, y, z) = x^2 y + zy$  convient.

2) **En utilisant la fonction donnée dans la preuve du théorème de Poincaré :**

On pose

$$\begin{aligned} \varphi((x, y, z), t) &= x.P(tx, ty, tz) + y.Q(tx, ty, tz) + z.R(tx, ty, tz) \\ &= 2t^2 x^2 y + (t^2 x^2 y + tzy) + tyz = 3t^2 x^2 y + 2tyz. \end{aligned}$$

Alors,

$$\phi(x, y, z) = \int_0^1 \varphi((x, y, z), t) dt = \int_0^1 (3t^2 x^2 y + 2tyz) dt = [t^3 x^2 y + t^2 yz]_0^1 = x^2 y + yz,$$

est un potentiel de  $\overrightarrow{V}$ .

**5.2.36 EXEMPLE.** Soit  $\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$  définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

- i)  $\omega$  est fermée car  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$
- ii)  $\omega$  n'est pas exacte car, si  $\gamma$  est la courbe paramétrée fermée,  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  on a

$$\oint_{\gamma^+} \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Comme  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  n'est pas étoilé, le théorème de Poincaré ne s'applique pas dans ce cas. Par contre, si on restreint  $\omega$  au domaine  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ , qui lui est étoilé, le théorème de Poincaré permet d'affirmer que  $\omega$  admet une primitive sur  $D$ .

En effet,  $\omega = df$  où  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction définie par  $f(x, y) = 2 \arctan \left( \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ .

### 5.3 Formule de Green-Riemann

On a vu que pour  $\vec{V}$  un champ de gradient (ou  $\omega$  une forme différentielle exacte), pour toute courbe fermée  $\gamma$ ,  $\oint_{\gamma} \vec{V} = 0$  (resp.  $\oint_{\gamma} \omega = 0$ )

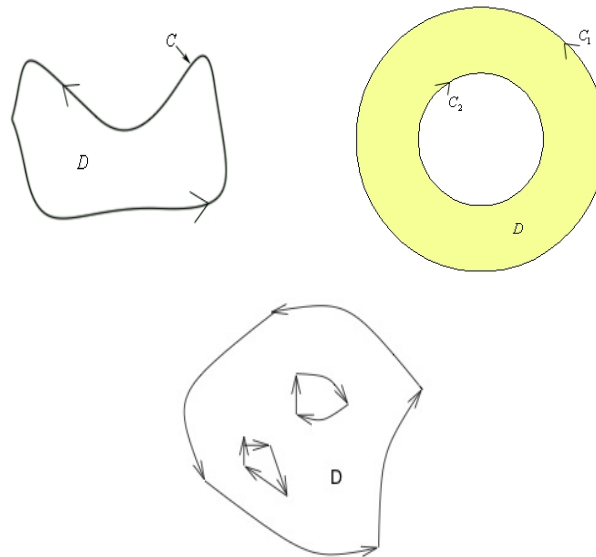
Pour un champ de vecteurs qui n'est pas un champ de gradient, en général, cette intégrale curviligne n'est pas nulle, la formule de Green-Riemann que nous allons voir, montre (entre autre) que l'intégrale d'un champ de vecteurs le long d'une courbe fermée simple qui borde un domaine du plan s'écrit comme une intégrale double sur le domaine délimité par cette courbe.

#### 5.3.1 DÉFINITION

Si  $D$  est un domaine du **plan**, dont le bord est formé d'un nombre  $k$  de courbes simples et fermées  $C_1, \dots, C_k$ , on oriente son bord suivant la convention de la matière à gauche :

"lorsque l'on parcourt n'importe qu'elle courbe  $C_i$  du bord on doit avoir le domaine  $D$  sur sa gauche".

On dit dans ce cas que le bord  $\partial D$  de  $D$  est orienté dans le sens direct (ou positif).



Les domaines que nous considérons pour l'énoncé du Théorème de Green-Riemann seront de cette forme, un tel domaine sera appelé "domaine admissible".

## 5.3.2 THÉORÈME (GREEN-RIEMANN)

- 1) Soit  $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  une forme différentielle de classe  $C^1$  définie sur un domaine admissible  $D$  du plan. On suppose que son bord  $\partial D^+$  est orienté dans le sens direct.

Alors

$$\int_{\partial D^+} \omega = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{Formule de Green-Riemann}).$$

La version équivalente pour les champs de vecteurs :

- 2) Soit  $\vec{V}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  défini sur un domaine admissible  $D$  du plan. On suppose que son bord  $\partial D$  est orienté dans le sens direct. Alors

$$\int_{\partial D^+} \vec{V} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{Formule de Green-Riemann}).$$

---

## 5.3.3 REMARQUE

Si  $\vec{V}$  est un champ de vecteurs ( ou  $\omega$  est une forme différentielle) comme dans l'énoncé du théorème, qui satisfait

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

alors son intégrale sur  $\partial D$  est nulle.

En particulier si  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$  est un champ de gradient ( ou  $\omega$  est une forme différentielle exacte), alors grâce au lemme de Schwarz,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

d'où son intégrale sur  $\partial D$  est nulle, on retrouve ainsi le résultat qui dit que l'intégrale curviligne d'un champ de gradient le long d'une courbe fermée est nulle .

*Démonstration:* Commençons par démontrer ce théorème dans des cas particuliers.

1) Dans le cas d'un rectangle  $D = [a, b] \times [c, d]$ . On calcule successivement les deux termes de l'égalité dans la formule de Green-Riemann, et on vérifie qu'on obtient la même chose.

La courbe fermée  $\partial D^+$  est formée de 4 segments orientés  $[(a, c), (b, c)]$ ,  $[(b, c), (b, d)]$ ,  $[(b, d), (a, d)]$  et  $[(a, d), (a, c)]$ , ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\partial D^+} \omega &= \int_a^b P(x, c) dx + \int_c^d Q(b, y) dy + \int_b^a P(x, d) dx + \int_d^c Q(a, y) dy \\ &= \int_a^b P(x, c) dx + \int_c^d Q(b, y) dy - \int_a^b P(x, d) dx - \int_c^d Q(a, y) dy \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy &= \int_c^d \left( \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx \right) dy - \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= + \int_c^d Q(b, y) dy - \int_c^d Q(a, y) dy + \int_a^b P(x, c) dx - \int_a^b P(x, d) dx. \end{aligned}$$

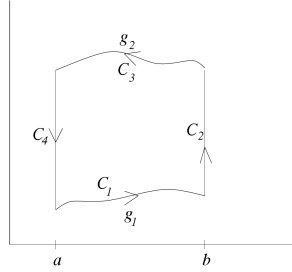
$$\text{D'où l'égalité } \int_{\partial D^+} \omega = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

2) On suppose maintenant que

•  $\omega(x, y) = P(x, y)dx,$

•  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$  où  $g_1 \leq g_2$  sont de classe  $C^1$ .

Appelons  $C_1, C_2, C_3, C_4$  les courbes comme sur la figure ci-dessous.



Soit  $\gamma_i$  une paramétrisation correspondant à  $C_i$  :

Pour  $C_1 : \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_1(t) = (t, g_1(t)),$

Pour  $C_2 : \gamma_2 : [g_1(b), g_2(b)] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) = (b, t).$

Pour  $C_3 : \gamma_3 : [b, a] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_3(t) = (t, g_2(t)),$

Pour  $C_4 : \gamma_4 : [g_2(a), g_1(a)] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_4(t) = (a, t).$

Alors,

$$\int_{C_1} \omega = \int_a^b P(t, g_1(t))dt, \quad \int_{C_2} \omega = \int_{g_1(b)}^{g_2(b)} 0 dt = 0.$$

de même :

$$\int_{C_3} \omega = - \int_a^b P(t, g_2(t))dt, \quad \int_{C_4} \omega = 0.$$

Ainsi  $\int_{\partial D^+} \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega + \int_{C_3} \omega + \int_{C_4} \omega = \int_a^b (P(t, g_1(t)) - P(t, g_2(t)))dt.$

D'autre part,

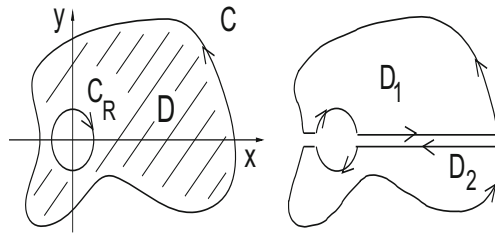
$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left( - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_a^b \left( - \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) - P(x, g_2(x)) dx.$$

D'où l'égalité  $\int_{\partial D^+} \omega = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$

3) De manière analogue, on peut montrer le théorème dans le cas où :

- $\omega(x, y) = Q(x, y)dy$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(y) \leq x \leq g_2(y), c \leq y \leq d\}$ , où  $g_1 \leq g_2$  sont de classe  $C^1$ .

La combinaison de ces deux cas particuliers donne une preuve du Théorème de Green-Riemann, lorsque le domaine est à la fois du type I et de type II, on termine en observant que grâce à la propriété d'additivité, on obtient une preuve pour les domaines qui sont réunion finie de domaines de type I et II.  $\square$



$$\partial D = C_R \cup C$$

### Application au calcul d'aires

On peut appliquer la formule de Green-Riemann dans le cas où  $D$  est domaine du plan dont le bord est une courbe fermée  $\partial D = \gamma$  alors pour  $\omega = -ydx$ , on obtient  $\int_{\gamma^+} -ydx = \iint_D dx dy$  et pour  $\omega = xdy$ , on a  $\int_{\gamma^+} xdy = \iint_D dx dy$  d'où le calcul de l'aire via l'intégrale curviligne

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx dy = - \int_{\gamma^+} y dx = \int_{\gamma^+} x dy = \frac{1}{2} \int_{\gamma^+} -y dx + x dy \quad (5.1)$$

$$\text{Aire}(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D^+} -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta) d\theta \quad (5.2)$$

**5.3.5 EXEMPLE (AIRE D'UNE ELLIPSE).** L'ellipse  $\mathcal{E}$  d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  a pour équation paramétrique  $x = a \cos(t)$ ,  $y = b \sin(t)$  avec  $t \in [0, 2\pi]$ . D'après la formule de Green-Riemann, l'aire de l'ellipse  $\mathcal{E}$  est alors égale à :

$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} \int_{\partial D^+} -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2(t) + ab \sin^2(t)) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = ab\pi.$$

**5.3.6 EXEMPLE.** Déterminer le travail du champ de vecteurs  $\vec{V}(x, y) = (3x + y, -x + 2y)$  le long de l'ellipse  $4x^2 + y^2 = 4$ , orientée dans le sens trigonométrique.

Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble formé de l'ellipse et de son intérieur. Le champ de vecteurs  $\vec{V}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , et  $\mathcal{E}$  est un domaine admissible pour le Théorème de Green-Riemann, donc on peut l'appliquer pour obtenir

$$\text{le travail de } \vec{V} = \int_{\partial\mathcal{E}^+} \vec{V} = \int_{\mathcal{E}} (-2) dx dy = -2 \text{Aire}(\mathcal{E}) = -4\pi.$$

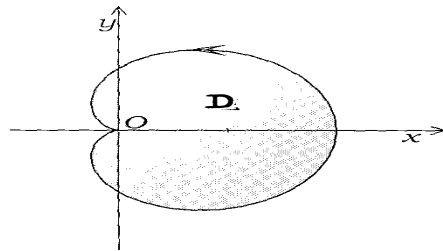
### En coordonnées polaires

Soit  $D$  un domaine limité par  $\partial D = \{(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \mid \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$  alors

$$\boxed{\text{Aire}(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D^+} -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta) d\theta} \quad (5.3)$$

**5.3.7 EXEMPLE (AIRE D'UNE CARDIOÏDE).** Soit  $a > 0$ . On considère la cardioïde  $D$  limité par la courbe d'équation polaire  $r = a(1 + \cos \theta)$ , avec  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . D'après la formule de Green-Riemann, l'aire de  $D$  en coordonnées polaires est alors égale à :

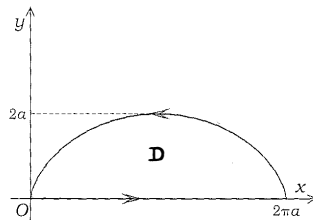
$$\text{Aire}(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D^+} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{3a^2\pi}{2}.$$



5.3.8 EXEMPLE (AIRE D'UNE ARCHE DE CYCLOÏDE). (trajectoire d'un point fixé sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite)

Etant donnée l'arche de cycloïde  $D$  limité par l'axe  $Ox$  et la courbe paramétrée  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$  où  $a$  est un nombre réel  $> 0$ . Comme  $y = 0$  sur l'axe  $Ox$ , d'après la formule de Green-Riemann, on aura

$$\text{Aire}(D) = - \int_{\partial D^+} y dx = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = 3a^2\pi$$



# Chapitre 6

## Intégrales de Surface

### 6.1 Surfaces paramétrées

Il y a aussi trois façons usuelles de spécifier une surface dans l'espace tridimensionnel.

**Graphe d'une fonction.** Probablement la façon la plus commune,

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2.$$

Par exemple, la demi-sphère,

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{avec} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

**Implicitement.** Nous l'avons aussi fait. Il s'agit de spécifier la surface comme l'ensemble de niveau d'une fonction de trois variables. Ceci revient à dire que la surface est l'ensemble des points qui vérifient l'équation . Par exemple, la sphère de rayon  $R$  centrée à l'origine est l'ensemble des points vérifiant

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

**par un paramétrage,** l'image d'une fonction. Il s'agit probablement de la façon la plus utile de spécifier une surface. Tout comme une courbe paramétrée, on peut obtenir une surface comme l'image d'une fonction de deux variables :

#### 6.1.1 DÉFINITION

Une **surface paramétrée** dans l'espace, est la donnée d'une fonction  $s$  de classes  $C^1$  définie sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} s : D &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto s(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

qu'on notera aussi par  $s(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ .

On notera par  $S$  l'image de  $s$ , i.e.

$$S = \{s(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \mid (u, v) \in D\}.$$


---

### 6.1.2 DÉFINITION

On dit qu'une surface paramétrée

$$\begin{aligned} s : D &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (s(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

est **régulière** en un point  $(u, v) \in D$  (ou  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S$ ) si les vecteurs dérivées partielles  $\frac{\partial s}{\partial u}(u, v)$  et  $\frac{\partial s}{\partial v}(u, v)$  sont linéairement indépendantes. Dans ce cas, le plan affine passant par  $s(u, v)$  et de base  $\left\{ \frac{\partial s}{\partial u}(u, v), \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \right\}$  est appelé **plan tangent** en  $(u, v)$  à la surface paramétrée  $s$  (ou en  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S$ ).

---

#### Propriété :

1)  $(u, v) \in D$  est régulier si et seulement si

$$\frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \neq \vec{0}.$$

2) Soit  $f$  une surface paramétrée régulière. Le vecteur  $\frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v)$  est un vecteur non nul normal au plan tangent en  $(u, v)$  à la surface paramétrée  $S$ .

3) le vecteur

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

est un **vecteur unitaire normal** à  $S$  au point  $s(u, v)$ .

6.1.3 **EXEMPLE.** Le graphe  $z = f(x, y) = x^2$  avec  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$  admet pour paramétrage

$$\begin{aligned} s : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightarrow (x, y, x^2) \end{aligned}$$

On a  $\frac{\partial s}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}$  et  $\frac{\partial s}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ainsi

$$\frac{\partial s}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial s}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent la surface est régulière en tout point de  $[0, 1] \times [0, 1]$  et un champ de vecteurs unitaire normal à la surface est donné par

$$\vec{n}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6.1.4 **EXEMPLE.** Soit  $R > 0$ . On utilise les coordonnées sphériques sur la sphère  $S_R$  de rayon  $R$  centrée en l'origine.

$$s(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \theta \in [-\pi, \pi], \quad \phi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Quel est la normale déterminée par cette paramétrisation ?

**Solution :** On calcule

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial s}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \cos \phi \\ R \cos \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R \cos \theta \sin \phi \\ -R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \phi \cos \theta \\ R^2 \cos^2 \phi \sin \theta \\ R^2 \cos \phi \sin \phi \end{pmatrix} = R \cos \phi \cdot s(\theta, \phi).$$

Comme  $\cos \phi > 0$ ,  $\vec{n}(\theta, \phi) = \frac{1}{R} s(\theta, \phi)$  est la normale sortante (c'est le vecteur radial sortant à la sphère).

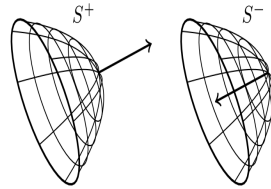
### 6.1.5 DÉFINITION (ORIENTATION)

Soit  $S$  une surface paramétrée régulière, le choix d'un champ de vecteurs normaux unitaires

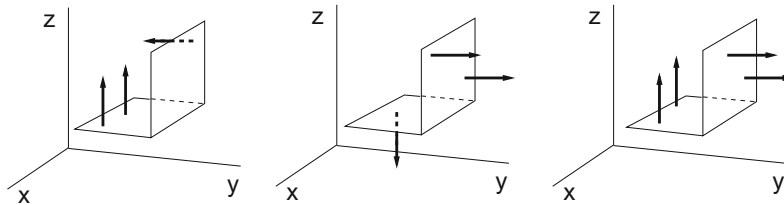
$$\vec{n} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

s'appelle une **orientation** de  $S$ .

- Il n'y a que deux choix possibles  $\vec{n} = \frac{\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}}{\|\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}\|}$  ou  $\vec{n} = -\frac{\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}}{\|\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}\|}$
- Un choix ayant été effectué, on note  $S^+$  la surface orientée par ce choix et  $S^-$  par le choix opposé.



- Une paramétrisation de la surface  $S$  est dite compatible avec l'orientation choisie si l'orientation est donnée par  $\vec{n} = \frac{\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}}{\|\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}\|}$ .



Les deux surfaces à gauche sont orientées, mais celle à droite n'est pas orientée.

### 6.1.1 Aire d'une surface

#### Aire d'un parallélogramme

L'aire d'un parallélogramme est le produit de la longueur de sa base par celle de la hauteur. Si le parallélogramme  $P$  est engendré par les vecteurs  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$ , alors

$$\text{aire}(P) = \|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\|.$$

En effet, soit  $\vec{OC}$  la projection de  $\vec{OB}$  sur la droite engendrée par  $\vec{OA}$ , alors  $\vec{OC}$  est colinéaire à  $\vec{OA}$  et  $\vec{CB}$  est orthogonal à  $\vec{OA}$ .

D'où  $\|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\| = \|\vec{OA} \wedge (\vec{OB} - \vec{OC})\| = \|\vec{OA} \wedge \vec{CB}\| = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{CB}\| = \text{base} \times \text{hauteur}$ .

Revenant à la surface paramétrée  $S$ , définie par  $s(u, v)$ , telle que  $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ . L'image d'un rectangle de sommet  $(u, v)$  et dont les côtés  $\Delta u$  et  $\Delta v$  sont très petits est approximativement un parallélogramme construit sur les vecteurs

$\vec{U} = s(u + \Delta u, v) - s(u, v) \sim \frac{\partial s}{\partial u} \Delta u$  et  $\vec{V} = s(u, v + \Delta v) - s(u, v) \sim \frac{\partial s}{\partial v} \Delta v$ , donc son aire  $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|$  est voisine de

$$\left\| \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \right\| \Delta u \Delta v$$

Ceci motive la définition suivante :

### 6.1.6 DÉFINITION

L'aire d'une surface paramétrée  $S$  définie par  $s(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ ,  $(u, v) \in D$ , est donnée par l'intégrale double

$$\text{Aire}(S) = \iint_D dA = \iint_D \left\| \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

où  $dA = \left\| \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$  est appelé **élément d'aire**.

On note aussi l'élément d'aire par  $dS$ .

### 6.1.7 REMARQUE

Si  $S$  est un graphe,  $z = f(x, y)$  avec  $(x, y) \in D$ , alors  $s(x, y) = (x, y, f(x, y))$  et le vecteur normal dans ce cas est

$$\vec{n}(x, y, z) = \frac{\partial s}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial s}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, l'élément d'aire

$$dA = \left\| \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \right\| dx dy = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1} dx dy.$$

6.1.8 **EXEMPLE.** L'aire de la surface  $S = \{(x, y, 2x + 3y) \mid (x, y) \in [0, 1]^2\}$  est égale à

$$\iint_{[0,1]^2} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy = \iint_{[0,1]^2} \sqrt{4 + 9 + 1} dx dy = \sqrt{14} \int_0^1 dx \int_0^1 dy = \sqrt{14}.$$

6.1.9 **EXEMPLE.** Calculer l'aire du triangle  $T$  de sommets  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (0, -1, 2)$  et  $c = (0, 2, 1)$ .

**Solution :** On utilise la paramétrisation de  $T$  donnée par :  $s(u, v) = a + u(b - a) + v(c - a)$  où  $u \geq 0$ ,  $v \geq 0$  et  $u + v \leq 1$ . On a  $a = s(0, 0)$ ,  $b = s(1, 0)$  et  $c = s(0, 1)$ . On calcule

$$\frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) = (b - a) \wedge (c - a)$$

D'où  $\text{Aire}(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \right\| dudv = \|(b - a) \wedge (c - a)\| \iint_D dudv = \|(b - a) \wedge (c - a)\| \cdot \text{aire}(D)$ .

Comme  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u + v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$  c'est le triangle de sommets  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  donc d'aire  $\frac{1}{2}$ , d'où l'aire de  $S$  est égale à  $\frac{\|(b-a) \wedge (c-a)\|}{2}$ .

Puisque  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (0, -1, 2)$  et  $c = (0, 2, 1)$  on aura  $\|(b - a) \wedge (c - a)\| = \|(-5, -1, -3)\| = \sqrt{35}$  d'où  $\text{aire}(S) = \frac{\sqrt{35}}{2}$ .

6.1.10 **EXEMPLE.** Calculer l'aire de la sphère  $S_R$  de centre 0 et de rayon  $R$ ?

**Solution :** On utilise les coordonnées sphériques sur la sphère de centre 0 et de rayon  $R$

$$s(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \theta \in [-\pi, \pi], \quad \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

On a

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial s}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \cos \phi \\ R \cos \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R \cos \theta \sin \phi \\ -R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \phi \cos \theta \\ R^2 \cos^2 \phi \sin \theta \\ R^2 \cos \phi \sin \phi \end{pmatrix} =$$

$R \cos \phi \cdot s(\theta, \phi)$ ,

d'où  $\left\| \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \right\| = R \cos \phi \cdot \|s(\theta, \phi)\| = R^2 \cos \phi$

Finalement,

$$\text{Aire}(S_R) = \iint_{[-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} R^2 \cos \phi d\theta d\phi = R^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi = 4\pi R^2.$$

## 6.1.2 Invariance

### 6.1.11 THÉORÈME

L'aire ne dépend pas du choix du paramétrage.

*Démonstration:* Changer de paramétrage, c'est remplacer  $(u, v)$  par  $(u', v')$  qui sont fonction inversible de  $u$  et  $v$ . D'après la formule de dérivation des fonctions composées, le nouveau paramétrage  $s_1(u', v') = s(u, v)$  satisfait :

$$\frac{\partial s_1}{\partial u'} = \frac{\partial s_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial s_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u'} \quad \frac{\partial s_1}{\partial v'} = \frac{\partial s_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial s_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v'}$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial u'} \wedge \frac{\partial s_1}{\partial v'} = \frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v} \left( \frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'} \right) = \frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v} \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}$$

et on conclut avec la formule de changement de variables dans les intégrales doubles.  $\square$

## 6.1.3 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

Pour déterminer le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface, Il faut préciser si on s'intéresse au flux sortant ou rentrant, d'où la nécessité d'orienter la surface. Il faudrait alors éviter les surfaces non-orientables, comme le célèbre ruban de Möbius (voir Figure ci-dessous).

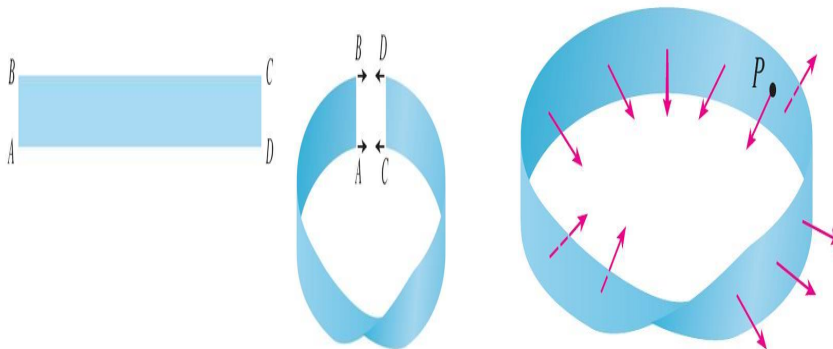


FIGURE 6.1 – Ruban de Möbius

## 6.1.13 DÉFINITION (DU FLUX D'UN CHAMP DE VECTEURS À TRAVERS UNE SURFACE)

Soit  $\vec{V}(x, y, z)$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $S$  une surface orientée par un choix de normale unitaire  $\vec{n}$ . Le flux de  $\vec{V}$  à travers  $S$  est l'intégrale

$$\text{flux}(\vec{V}, S) = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$

où  $dA$  désigne l'élément d'aire et " $\cdot$ " est le produit scalaire usuel.

## 6.1.14 REMARQUE

1) Soit  $s(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ , est une paramétrisation régulière de la surface  $S$  compatible avec l'orientation choisie,

Comme  $dA = \left\| \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \right\| \, dudv$  et

$\vec{n} = \frac{\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v} \right\|}$ , le flux du champs  $\vec{V}$  à travers  $S$  s'écrit alors

$$\text{flux}(\vec{V}, S) = \iint_D \vec{V}(s(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \right) \, dudv$$

2) Si  $\vec{V} = (P, Q, R)$  alors le produit mixte peut se calculer par :

$$\vec{V} \cdot \left( \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \right) = \det \begin{pmatrix} P(s(u, v)) & \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ Q(s(u, v)) & \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ R(s(u, v)) & \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

3) Si  $S$  est un graphe,  $z = f(x, y)$  avec  $(x, y) \in D$ , alors  $s(x, y) = (x, y, f(x, y))$

et le vecteur normal est  $\frac{\partial s}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial s}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Le flux du champs  $\vec{V}$  à travers  $S$  est donné alors par l'intégrale double

$$\text{flux}(\vec{V}, S) = \iint_D \vec{V}(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \, dxdy$$

**6.1.15 EXEMPLE.** Calculer le flux du champ radial  $\vec{V}(x, y, z) = (x, y, z)$  à travers  $S_R$ , la sphère centrée en  $(0, 0, 0)$  et de rayon  $R$ , orientée par la normale sortante ?

**Réponse :** Dans ce cas la normale  $\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$  est parallèle au champ  $\vec{V}$ , et  $\vec{V} \cdot \vec{n} = \frac{1}{R}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{R^2}{R} = R$ .

Ainsi,  $flux(\vec{V}, S_R) = \iint_{S_R} \vec{V} \cdot \vec{n} dA = R \iint_{S_R} dA = R \times Aire(S_R) = R \times 4\pi R^2 = 4\pi R^3$ .

**6.1.16 EXEMPLE.** Calculer le flux du champ de vecteurs  $V(x, y, z) = (x, y, 0)$  à travers la sphère unité orientée par la normale sortante ?

**Réponse :** Comme les coordonnées sphériques déterminent la normale sortante,

$$V(s(\theta, \phi)) \cdot \left( \frac{\partial s}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial s}{\partial \phi}(\theta, \phi) \right) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \cos^2 \phi \\ \sin \theta \cos^2 \phi \\ \cos \phi \sin \phi \end{pmatrix} = \cos^3 \phi.$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} flux(V, S) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \phi d\phi d\theta = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \phi - \cos(\phi) \sin^2(\phi)) d\phi \\ &= 2\pi \left[ \sin \phi - \frac{1}{3} \sin^3(\phi) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

## 6.1.4 Invariance

### 6.1.17 THÉORÈME

Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface paramétrée ne dépend pas du paramétrage mais seulement de son orientation. Changer l'orientation change le signe du flux.

---

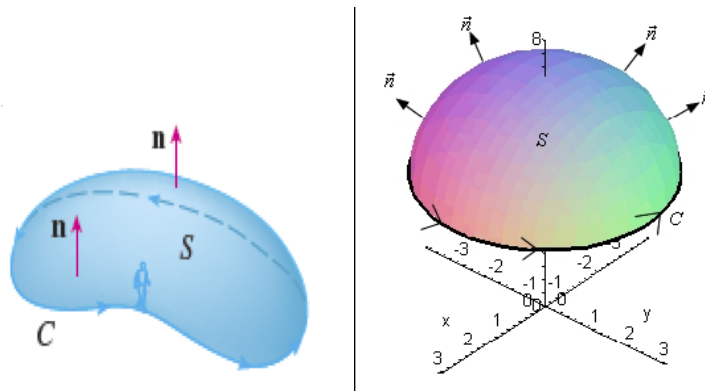
*Démonstration:* Ceci dépend de la définition en fonction de la normale et de l'élément d'aire. Comme c'est la valeur absolue du jacobien du changement de variables qui intervient dans la formule du changement de variables, si on change d'orientation, le jacobien est négatif donc égal à l'opposé de sa valeur absolue, d'où le changement du signe pour le flux.  $\square$

### 6.1.5 Lien entre travail et flux - Lien entre intégrale curviligne et l'intégrale de surface

#### 6.1.19 DÉFINITION (ORIENTATION DU BORD D'UNE SURFACE)

Soit  $S$  une surface orientée de bord  $\partial S = C$ . L'orientation du bord doit être choisie de sorte que lorsqu'un observateur se déplace le long du bord  $\partial S = C$  dans le sens positif, avec la surface  $S$  sur sa gauche, la normale  $\vec{n}$  est orientée vers le haut ( elle va de ses pieds à sa tête).

On dira dans ce cas que les orientations de  $S$  et  $\partial S = C$  sont compatibles.



#### 6.1.20 THÉORÈME (THÉORÈME DE STOKES)

Soit  $C$  une courbe paramétrée, orientée dans le sens direct. Soit  $S$  une surface de bord  $\partial S = C$ , telle que les orientations de  $S$  et  $C$  soient compatibles.

Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  dans un voisinage de  $S$ . Alors on a la formule de Stokes

$$\boxed{\text{travail}(\vec{V}, C^+) = \text{flux}(\text{rot } \vec{V}, S^+)}$$

Soit  $s(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ , une paramétrisation de la surface  $S$  compatible avec l'orientation choisie. La formule de Stokes s'écrit

$$\boxed{\text{flux}(\text{rot } \vec{V}, S^+) = \iint_D \text{rot } \vec{V} \cdot \left( \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \right) dudv = \int_{C^+} \vec{V}}$$

*Démonstration:* On considère le cas particulier où  $S$  est paramétrée par  $s$  sur un domaine  $D$  du plan (le cas général s'y ramène en découpant la surface en petits morceaux) et  $C = \partial S$ . On va se ramener à la formule de Green-Riemann.

On pose  $P(u, v) = V(s(u, v)) \cdot \frac{\partial s}{\partial u}(u, v)$  et  $Q(u, v) = V(s(u, v)) \cdot \frac{\partial s}{\partial v}(u, v)$ .

Alors  $\text{circulation}(V, s \circ C) = \int_C Pdx + Qdy$ . D'après la formule de dérivation des fonctions composées on a

$$\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u} = \text{rot } \vec{V} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}$$

On applique la formule de Green-Riemann, on obtient

$$\begin{aligned} \text{flux}(\text{rot } \vec{V}, S) &= \iint_D \text{rot } \vec{V} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v} dudv = \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u} \right) dudv \\ &= \int_C Pdx + Qdy = \text{travail}(\vec{V}, \partial S). \end{aligned}$$

□

#### 6.1.22 REMARQUE

1) Etant donnée une courbe orientée  $C$ . Le théorème de Stokes s'applique à toute surface  $S$  dont le bord est  $C$  et dont l'orientation est compatible avec celle de  $C$  et pour tout champ de vecteurs  $\vec{V}$  défini sur  $S$ .

6.1.23 EXEMPLE. Étant donné le champ de vecteurs  $\vec{V} = (z, x, y)$ , on souhaite calculer son travail le long du cercle unité  $C$  orienté dans le sens positif. On va faire le calcul en utilisant la formule de Stokes.

- i) Naturellement, la surface du disque unité  $D$  est bordée par le cercle  $C$ , on l'oriente par  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  pour que son orientation soit compatible avec l'orientation de  $C$ . D'autre part,  $\text{rot } \vec{V} = (1, 1, 1)$ . Alors,  $\text{flux}(\text{rot } \vec{V}, D) = \iint_D \text{rot } \vec{V} \cdot (0, 0, 1) dx dy = \iint_D dx dy = \text{aire}(D) = \pi$ . Ainsi,  $\int_C \vec{V} = \text{flux}(\text{rot } \vec{V}, S) = \pi$ .
- ii) On peut aussi prendre une autre surface, par exemple la surface bornée  $S$ , délimitée par  $z = 1 - x^2 - y^2$  et le plan  $xOy$ . Le bord de la surface  $S$  est le cercle  $C$ , pour une orientation de  $S$  compatible avec celle de  $C$ , il faudrait prendre le vecteur sortant d'où  $\vec{n} dA = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) dx dy = (2x, 2y, 1) dx dy$ .

Alors, si  $D$  est le disque unité ( la projection de  $S$  sur  $xOy$ ), on a

$$\text{flux}(\vec{\text{rot}} \vec{V}, S) = \iint_D \vec{\text{rot}} \vec{V} \cdot (2x, 2y, 1) dx dy = \iint_D (2x + 2y + 1) dx dy.$$

Par symétrie,  $\iint_D 2x dx dy = \iint_D 2y dx dy = 0$ , d'où

$$\text{flux}(\vec{\text{rot}} \vec{V}, S) = \iint_D (2x + 2y + 1) dx dy = \iint_D dx dy = \text{aire}(D) = \pi.$$

Ainsi,  $\int_C \vec{V} = \text{flux}(\vec{\text{rot}} \vec{V}, S) = \pi$ .

#### 6.1.24 COROLLAIRE

Soit  $S$  une surface fermée (c-à-d sans bord). Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  défini au voisinage de  $S$ . Alors le flux de  $\vec{\text{rot}} \vec{V}$  à travers  $S$  est nul.

$$\partial S = \emptyset \implies \text{flux}(\vec{\text{rot}} \vec{V}, S) = 0$$

#### 6.1.25 COROLLAIRE

Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  défini sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose que le rotationnel de  $V$  est nul.

Soit  $C$  une courbe fermée qui borde une surface contenue dans  $\Omega$ . Alors la circulation de  $\vec{V}$  le long de  $C$  est nulle.

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0} \implies \oint_C \vec{V} = 0$$

6.1.26 EXEMPLE. On considère le champ de vecteurs  $\vec{V}$  défini en dehors de l'axe

$0z$  par  $\vec{V}(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ . Vérifier que  $\vec{\text{rot}} \vec{V} = 0$  en dehors de l'axe

$0z$ . En déduire que le travail de  $\vec{V}$  le long de toute courbe fermée ne rencontrant pas l'axe  $0z$  est égale à  $2\pi$  fois le nombre de tours que fait la courbe autour de l'axe  $0z$ .

**Solution :** Soit  $c : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$  une courbe fermée ne rencontrant pas l'axe  $0z$ . Alors sa projection orthogonale  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  sur le plan

$xOy$  est une courbe fermée ne passant pas par l'origine. La surface paramétrée  $(t, s) \mapsto (x(t), y(t), sz(t))$  à son bord formé des deux courbes  $C$  et  $\sigma$ , comme  $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$  la formule de Stokes nous donne,  $\text{travail}(\vec{V}, C) = \text{travail}(\vec{V}, \sigma)$ .

Ensuite on remarque que  $\vec{V}$  est tangent au plan  $xOy$  et son travail coïncide avec l'intégrale curviligne de la forme  $d\theta$ . par conséquent,  $\text{travail}(\vec{V}, \sigma)$  est la variation totale de l'angle polaire le long de  $\sigma$ , qui vaut  $2\pi$  fois le nombre de tours que  $\sigma$  fait autour de l'origine. Ce nombre coïncide avec le nombre de tours que fait  $C$  autour de l'axe  $Oz$ .

### 6.1.6 Lien entre intégrale triple et intégrale de surface

#### 6.1.27 DÉFINITION

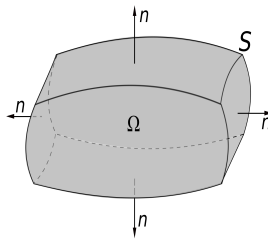
Une surface paramétrée  $S$  est dite **fermée** (ou **sans bord**) si son bord est vide i.e.  $\partial S = \emptyset$ .

#### 6.1.28 EXEMPLE. Une sphère est une surface fermée.

Un disque n'est pas une surface fermée, puisque son bord est un cercle.

#### 6.1.29 THÉORÈME (THÉORÈME D'OSTROGRADSKI-GAUSS (OU DE LA DIVERGENCE))

Soit  $S$  une surface **fermée** qui délimite un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  i.e.  $\partial\Omega = S$ . On choisit l'orientation de  $S$  de sorte que le vecteur normal  $\vec{n}$  pointe vers l'extérieur de  $\Omega$ .



Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  défini sur  $\Omega$ . Alors, on a la formule d'Ostrogradski :

$$\text{flux}(\vec{V}, S) = \iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{V}) dx dy dz$$

*Démonstration:* Pour simplifier, on suppose  $\Omega$  convexe. Soit  $D_x$  sa projection sur le plan  $\{x = 0\}$ . Alors

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (y, z) \in D_x, f_1(y, z) \leq x \leq f_2(y, z)\}$$

On a  $\iiint_{\Omega} \frac{\partial V_x}{\partial x} dx dy dz = \iint_{D_x} V_x(f_2(y, z), y, z) dy dz = \text{flux}(V_1, S)$  où  $V_1$  est le champ de vecteurs  $(V_x, 0, 0)$ .

De même on trouve  $\iiint_{\Omega} \frac{\partial V_y}{\partial y} dx dy dz = \text{flux}(V_2, S)$  et  $\iiint_{\Omega} \frac{\partial V_z}{\partial z} dx dy dz = \text{flux}(V_3, S)$

Comme  $V = V_1 + V_2 + V_3$ , on trouve la formule annoncée.  $\square$

### 6.1.31 COROLLAIRE

Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteurs est de classe  $C^1$  sur un convexe  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Si  $\vec{V}$  a une divergence nulle, alors son flux à travers toute surface  $S$  fermée contenue dans  $\Omega$  est nul.

$$\boxed{\text{div}(\vec{V}) = 0 \implies \text{flux}(\vec{V}, S) = 0}$$

**6.1.32 EXEMPLE.** Calculer le volume de la boule unité  $B$  à l'aide du champ de vecteurs  $\vec{V}(x, y, z) = (x, y, 0)$ .

**Solution :** On a  $\text{div}(\vec{V}) = 2$ . On oriente la sphère unité  $S$  par la normale sortante. La formule d'Ostrogradski nous donne

$$2\text{Vol}(B) = \iiint_B \text{div}(\vec{V}) dx dy dz = \text{flux}(\vec{V}, S)$$

et le calcul de l'exemple 6.1.16, donne  $\text{flux}(\vec{V}, S) = \frac{8\pi}{3}$ , d'où le volume de la boule unité est égal à  $\frac{4\pi}{3}$ .

**6.1.33 EXEMPLE.** Calculer le flux du champ  $\vec{V}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$  à travers la surface fermée  $S^+$  formée du cône précédent  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \in [0, 3]$  et du disque  $x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $z = 3$ , orientée par le vecteur normal sortant.

**Réponse :** Comme la surface est fermée, on peut utiliser le théorème d'Ostrogradski :

$$\text{flux}(\vec{V}, S^+) = \iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{V}) dx dy dz,$$

où  $\Omega$  est le solide délimité par  $S$ , donc  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 3\}$ , et  $\operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) = 2x + 2y + 2z$ . On a alors,  $\operatorname{flux}(\vec{V}, S^+) = 2 \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz$ , par symétrie, par rapport à  $xOz$  et  $yOz$ , on a

$$\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \iiint_{\Omega} y dx dy dz = 0.$$

Il ne reste plus qu'à calculer  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , par exemple par le théorème de Fubini (par piles verticales) : on note par  $D_z$  le disque centré en  $(0, 0, z)$  et de rayon  $z$ , alors

$$\begin{aligned} \operatorname{flux}(\vec{V}, S^+) &= 2 \iiint_{\Omega} z dx dy dz = 2 \int_0^3 z \left( \iint_{D_z} dx dy \right) dz = 2 \int_0^3 z \cdot \operatorname{aire}(D_z) dz \\ &= 2 \int_0^3 z(\pi z^2) dz = 2\pi \left[ \frac{z^4}{4} \right]_0^3 = \frac{81\pi}{2}. \end{aligned}$$

**FIN**