Chapter 4

Rappels sur l'intégrale de Riemann

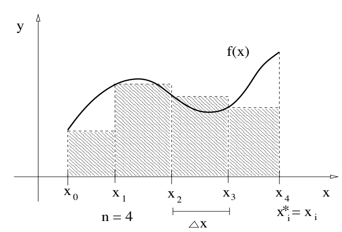
4.0.1 Définition (Définition de l'intégrale)

- Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

On appelle somme de Riemann associée à f, n et x_i^*, la somme

- $$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$$

où $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\Delta x$ et x_i^* est un point quelconque de $[x_{i-1}, x_i]$

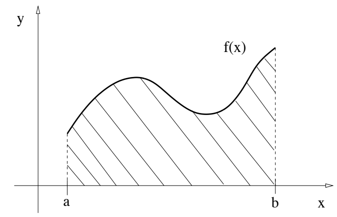


4.0.2 Théorème

Si f est continue, alors la suite (S_n) converge (indépendamment du choix des x_i^*). On appelle intégrale (au sens de Riemann) de f sur $[a, b]$, la limite de cette suite, et on note

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire du domaine délimité par le graphe de f et l'axe des abscisses.



4.0.3 Remarque

Cette définition est valable aussi pour les fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ c'est-à-dire les fonctions continues sauf en un nombre fini de points où elle admettent des limites à droite et à gauche.

Ce qui suit donne la définition (générale) des fonctions intégrable au sens de Riemann, qui inclus un plus grand nombre de fonctions, par exemple les fonctions monotones sur $[a,b]$.

- En utilisant la définition, on va calculer $\int_0^1 xdx$
- Dans ce cas, on a:

  $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = x$, $\Delta x = \frac{1}{n}$ et on prend $x_i^* = x_i = \frac{i}{n}$ alors
-
  $$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$
- D'où, $\int_0^1 xdx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$.

4.0.4 Remarque

- On a utiliser le résultat suivant: pour tout entier naturel m on a

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} k := 1+2+\cdots m = \frac{m(m+1)}{2}}$$ à démontrer en exercice !

Plus généralement

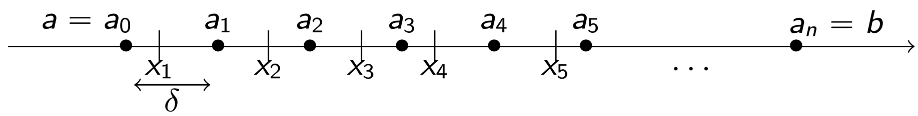
4.0.5 Définition

On appelle **subdivision** d'un intervalle réel $[a,\ b]$ toute famille finie $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ d'éléments du segment $[a,\ b]$ telle que :

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$$

On appelle **pas** (ou diamètre) de la subdivision σ le réel positif

$$\delta = \max_{1\leq i\leq n}(a_i - a_{i-1})$$

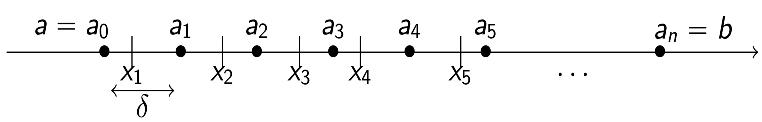


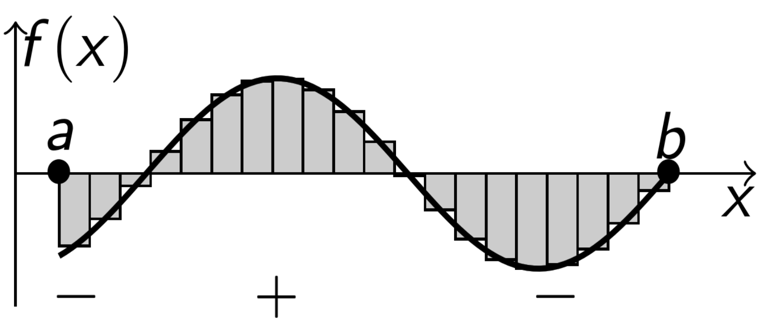
4.0.6 Définition

Définition des sommes de Riemann

- Soit $f : [\mathrm{a},\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable, $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ et des points $x_1, \ldots, x_n$ tels que $x_i \in [a_{i-1},\ a_i]$:
- La somme de Riemann de f associée à la subdivision σ et aux points $x_1, \ldots, x_n$ est la somme (finie)

$$\boxed{S(f, \delta, x_i) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1})}$$





4.0.7 Définition

Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) si

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ n \to +\infty}} S(f, \sigma, x_i)$$

existe, est finie et ne dépend pas du choix des x_i. Dans ce cas

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ n \to +\infty}} S(f, \sigma, x_i)}$$

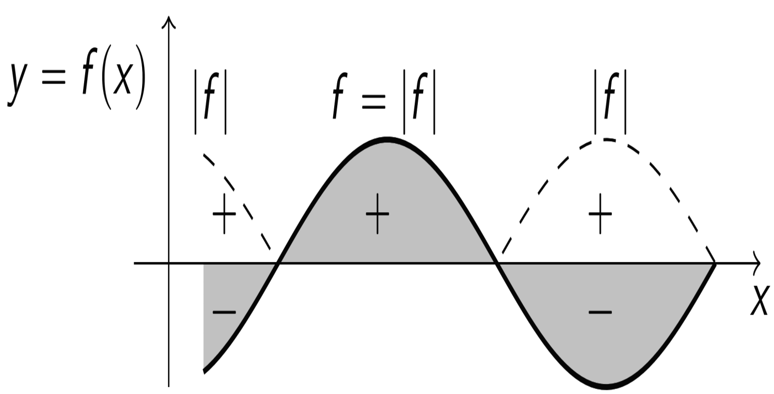
4.0.8 Théorème

Les fonctions continues par morceaux, en particulier les fonctions continues, sont des fonctions intégrables. Les fonctions monotones sont des fonctions intégrables.

4.0.9 Remarque

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann.

- $$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \text{ Aire algébrique}}$$
- $$\boxed{\int_a^b |f(x)|\, dx = \text{ Aire géométrique}}$$



4.1 Techniques de calcul

1. Une **primitive** de f sur $[a,\ b]$ est une fonction F dérivable telle

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

2. pour calculer une intégrable il suffit de connaître une primitive

4.1.1 Théorème (fondamental du calcul intégral)

Si F est une **primitive** de f sur $[a,\ b]$ alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)}$$

- "Lu à l'envers", un tableau de dérivées est un tableau de primitives (à une constante près) .
- Le calcul d'une primitive consiste souvent après quelques transformations à "reconnaître" une des fonctions du tableau :

Définie sur I	f	$F(x) = \int f(x)dx$
$\mathbb{R} - \{0\}$ ou $\mathbb{R}^+ - \{0\}$	$x^\alpha,\ (\alpha < 0 \text{ et } \alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+ - \{0\}$	$x^\alpha,\ (\alpha \geq 0)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\mathbb{R} - \{0\}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$\mathbb{R} - \{-a\}$	$\dfrac{1}{x+a}$	$\ln(\lvert x+a\rvert)$
$\mathbb{R}$	$e^{ax},\ (a \neq 0)$	$\dfrac{e^{ax}}{a}$

Définie sur I	f	$F(x) = \int f(x)dx$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(ax+b),\ (a \neq 0)$	$-\dfrac{\cos(ax+b)}{a}$
$\mathbb{R}$	$\cos(ax+b),\ (a \neq 0)$	$\dfrac{\sin(ax+b)}{a}$
$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\text{cotan}(x)$	$\ln(\lvert\sin(x)\rvert)$

Définie sur I	f	$F(x) = \int f(x)dx$
$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$
$\mathbb{R} - \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\sin^2(x)} = 1+ \text{cotan}^2(x)$	$-\text{cotan}(x)$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$]-1,1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$

f	$F(x) = \int f(x)dx$
$\frac{u'}{u^m},\ m \neq 1$	$\frac{-1}{(m-1)u^{m-1}}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'\sin u$	$-\cos u$

Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I,
De la règle de dérivation d'un produit

$$(fg)' = f'g + fg' \iff fg' = (fg)' - f'g$$

En intégrant, de part et d'autres de cette égalité, on obtient
$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx$

nous déduisons la formule d'intégration par parties

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

on a aussi $\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$

4.1.2 EXEMPLE. Example

Soit à calculer $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$.

En posant $\begin{cases} f(x) = \ln(x) & \Longrightarrow \; f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & \Longrightarrow \; g(x) = x \end{cases}$

on obtient $\displaystyle\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + C$
où C est une constante.

4.1.3 Exemple. Exemple d'intégration par parties successives

Soit à calculer $\displaystyle\int \sin(x)e^x\,dx$.

En posant $\begin{cases} f(x) = \sin(x) & \Longrightarrow \; f'(x) = \cos(x) \\ g'(x) = e^x & \Longrightarrow \; g(x) = e^x \end{cases}$

on obtient $\int \sin(x)e^x\,dx = \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x\,dx$.

Ce n'est pas fini: on est ramener à calculer une primitive de $\cos(x)e^x$, on utilise une intégration par parties.

En posant $\begin{cases} u(x) = \cos(x) & \Longrightarrow \; u'(x) = -\sin(x) \\ v'(x) = e^x & \Longrightarrow \; v(x) = e^x \end{cases}$

4.1.4 Exemple. on obtient $\int \cos(x)e^x\,dx = \cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x\,dx$.

Ainsi, $\int \sin(x)e^x\,dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \sin(x)e^x\,dx$,

par suite $2\int \sin(x)e^x\,dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x$ d'où

$$\boxed{\int \sin(x)e^x\,dx = \frac{\sin(x)e^x - \cos(x)e^x}{2} = \frac{e^x(\sin(x) - \cos(x))}{2}.}$$

4.1.5 Exemple. Exemples

- Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin(t)\,dt$
- Faisons une intégration par parties en posant $u = t$ et $v' = \sin t$, d'où $u' = 1$ et $v = -\cos t$. Ainsi,

$$\int_0^{\pi} t\sin t dt = [-t\cos t]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos t dt = -\pi\cos(\pi) + [\sin t]_0^{\pi} = -\pi\cos(\pi) = \pi.$$

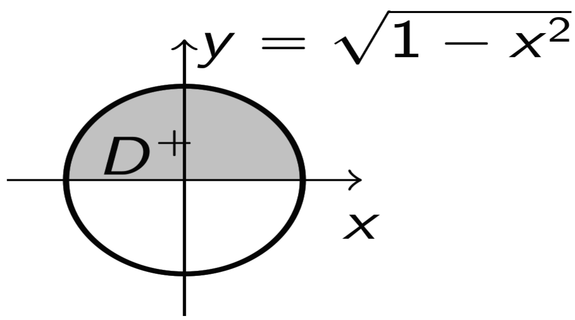
1) Changement de variable

- (Intégration par changement de variables) $x = u(t)$ alors $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(u(t))u'(t)dt}$ où $u : [c, d] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle que $u(c) = a$ et $u(d) = b$.

4.1.6 Remarque

- La méthode d'intégration par changement de variable n'a d'autre but que de remplacer une intégrale compliquée par une intégrale plus simple.
- La difficulté majeure consiste à trouver le changement de variable qui convient. Il faut essayer de choisir u égal à une certaine fonction qui apparait sous le signe d'intégration et dont la dérivée s'y trouve aussi à un facteur constant près.

4.1.7 Exemple. Calcul de l'aire du disque unité.



Aire du demi-disque D^+ est égale à l'intégrale de la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

- Aire $(D) = 2$Aire $(D^+) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$
- On va utiliser pour cela le changement de variable: $x = \sin t$ pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- AIors $dx = \cos t\, dt$ et puisque $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ on aura

$$\text{Aire } (D) = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}dt$$
$$= [\frac{1}{2}\sin(2t) + t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = (0 + \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2}) = \pi.$$