Université de Rennes 1 **Année 2018/2019**

Outils Mathématiques 4: corrigés des exercices §3 et §4

0. -

1. -

2. -

3. Intégrales curvilignes

Exercice 3.1. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{C^+} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$
où C^+ est le cercle unité orienté dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre).
Solution: Une paramétrisation du cercle est donnée par $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$, où $t \in [0, 2\pi]$. Alors $dx = x'(t)dt = -\sin t\,dt$ et $dy = y'(t)\,dt = \cos t\,dt$, ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{C^+} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy &= \int_0^{2\pi} ((\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t - \sin t)(\cos t))\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big((-\cos t \sin t - \sin^2 t) + (\cos^2 t - \sin t \cos t)\big)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-2\cos t \sin t + \cos^2 t - \sin^2 t\big)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin 2t + \cos 2t)\,dt = \left[\frac{\cos 2t}{2} + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = \boxed{0}.
\end{aligned}$$

Remarque 1 *On aurait aussi, remarquer que $\omega = (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ est exacte, en effet $\omega = df$ avec $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}$; ainsi $\displaystyle\int_{C^+} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy = \int_{C^+} df = \boxed{0}$, puisque C est une courbe fermée.*

Exercice 3.2. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{C^+} xy\,dx + (x+y)\,dy$

Solution: On a $\dfrac{\partial(xy)}{\partial y} = x \neq 1 = \dfrac{\partial(x+y)}{\partial x}$, la forme différentielle $\omega = xy\,dx + (x+y)\,dy$ n'est pas fermée, donc n'est pas exacte, on doit alors faire le calcul en utilisant la définition. On prend pour cela la paramétrisation du cercle donnée dans l'exercice précédent et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{C^+} xy\,dx + (x+y)\,dy &= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t)(\cos t))\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-\cos t \sin^2 t + \cos^2 t + \sin t \cos t\big)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\cos t \sin^2 t + \frac{1+\cos 2t}{2} + \sin t \cos t\right)dt \\
&= \left[\frac{-\sin^3 t}{3} + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} = \boxed{\pi}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.3. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma \frac{y+z}{x^2+y^2}\,dx + \frac{z+x}{x^2+y^2}\,dy + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dz$ lorsque:

1) γ est le segment de droite d'origine $A = (1, 1, 1)$ et d'extrémité $B = (2, 2, 2)$.

2) γ est l'hélice définie par $x = \cos t$, $y = \sin t$ et $z = t$, t variant de 0 à 2π.

Solution: On a $\dfrac{\partial(\frac{y+z}{x^2+y^2})}{\partial z} = \dfrac{1}{x^2+y^2} \neq \dfrac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial(\frac{x+y}{x^2+y^2})}{\partial x}$, la forme différentielle $\omega = \frac{y+z}{x^2+y^2}\, dx + \frac{z+x}{x^2+y^2}\, dy + \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dz$ n'est pas fermée, par conséquent n'est pas exacte, on doit alors faire le calcul en utilisant la définition.

1) Le segment $[A, B]$ qui relie A à B a par exemple pour paramétrisation:
$\gamma(t) = A + t(B - A) = (1, 1, 1) + t\,((2, 2, 2) - (1, 1, 1)) = (1 + t, 1 + t, 1 + t)$ avec $t \in [0, 1]$, alors

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{y+z}{x^2+y^2}\, dx + \frac{z+x}{x^2+y^2}\, dy + \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dz &= \int_0^1 \left(\frac{2+2t}{2(1+t)^2} + \frac{2+2t}{2(1+t)^2} + \frac{2+2t}{2(1+t)^2}\right) dt \\
&= 3\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = 3\left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \boxed{3\ln(2)}.
\end{aligned}$$

2) La parmétrisation donnée est $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$ et de $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ on aura

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{y+z}{x^2+y^2}\, dx + \frac{z+x}{x^2+y^2}\, dy + \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dz &= \int_0^{2\pi} \left((\sin t + t)(-\sin t) + (\cos t + t)(\cos t) + (\cos t + \sin t)\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t - t\sin t + \cos^2 t + t\cos t + \cos t + \sin t\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-t\sin t + t\cos t + \cos 2t + \cos t + \sin t\right) dt
\end{aligned}$$

Une intégration par parties donne: $\displaystyle\int_0^{2\pi} -t\sin t dt = [t\cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t dt = 2\pi - [\sin t]_0^{2\pi} = 2\pi$
et $\displaystyle\int_0^{2\pi} t\cos t dt = [t\sin t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0 + [\cos t]_0^{2\pi} = 0$ d'où

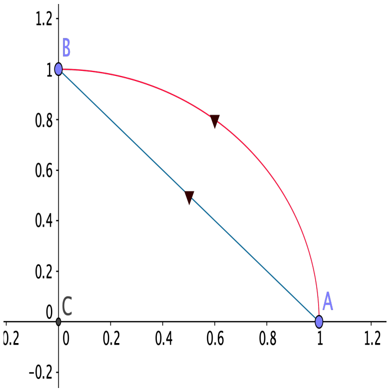
$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{y+z}{x^2+y^2}\, dx + \frac{z+x}{x^2+y^2}\, dy + \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dz &= \int_0^{2\pi} \left(-t\sin t + t\cos t + \cos 2t + \cos t + \sin t\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} -t\sin t dt + \int_0^{2\pi} t\cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos 2t dt + \int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \sin t dt \\
&= 2\pi + 0 + 0 + 0 + 0 = \boxed{2\pi}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.4. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma y^2\, dx - x^2\, dy$ lorsque:

1) Γ est le segment de droite d'origine $A = (1, 0)$ et d'extrémité $B = (0, 1)$.

2) Γ est l'arc de cercle de centre $(0, 0)$, de rayon 1 d'origine $A = (1, 0)$ et d'extrémité $B = (0, 1)$.

Solution:



On a $\dfrac{\partial(y^2)}{\partial y} = 2y \neq -2x = \dfrac{\partial(-x^2)}{\partial x}$, la forme différentielle $\omega = y^2\, dx - x^2\, dy$ n'est pas fermée, par conséquent n'est pas exacte, on doit alors faire le calcul en utilisant une paramétrisation.

1) une paramétrisation Γ du segment $[A, B]$ est donnée par $\Gamma(t) = A + t(B - A) = (1 - t, t)$ avec $t \in [0, 1]$, d'où

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma y^2\, dx - x^2\, dy &= \int_0^1 \big(t^2(-1) - (1-t)^2(1)\big)\, dt = \int_0^1 \big(-t^2 - (1-t)^2\big)\, dt \\
&= \left[\frac{-t^3}{3} + \frac{(1-t)^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{-\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

2) Une paramétrisation Γ du quart de cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, d'origine $A = (1, 0)$ et d'extrémité $B = (0, 1)$ est $\Gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ainsi

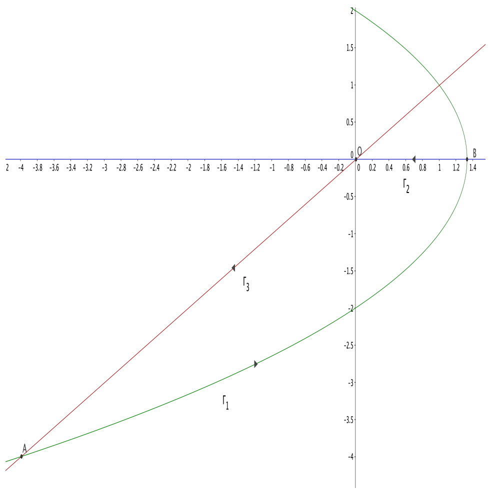
$$\begin{aligned}
\int_\Gamma y^2\, dx - x^2\, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin^2 t(-\sin t) - \cos^2 t(\cos t)\big)\, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(1 - \cos^2 t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(1 - \sin^2 t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin t \cos^2 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t dt \\
&= \left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} = \boxed{-\frac{4}{3}}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.5. Montrer que l'intégrale curviligne $\int_\Gamma xy^2\, dx + x^2 y\, dy$ est nulle lorsque Γ est un arc simple fermé.

Calculer cette intégrale lorsque $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où $\Gamma_1 = AB$ est l'arc de parabole d'équation $y^2 = 4 - 3x$ limité en A par la droite d'équation $y = x$ et en B par l'axe des $x \geqslant 0$, Γ_2 est le segment de droite allant de B à O et Γ_3 est le segment de droite allant de O à A.

Calculer une primitive de $xy^2\, dx + x^2 y\, dy$. Retrouver $\int_{\Gamma_i} xy^2\, dx + x^2 y\, dy$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Solution:



1) On a $\dfrac{\partial(xy^2)}{\partial y} = 2yx = \dfrac{\partial(x^2y)}{\partial x}$, la forme différentielle $\omega = xy^2\,dx + x^2y\,dy$ est fermée, comme elle est définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est un domaine étoilé d'après le théorème de Poincaré, elle est exacte, en particulier son intégrale curviligne est nulle le long de tout arc fermé (et bien sûr s'il est de plus simple).

2) Les abscisses des points d'intersections entre la parabole $y^2 = 4 - 3x$ et la droite $y = x$ sont les solutions de $x^2 + 3x - 4 = 0$ après calcul on trouve $x = 1$ et $x = -4$, par suite $y = 1$ et $y = -4$ respectivement. Ainsi $A = (-4, -4)$.

   L'abscisse du point B est solution de $0 = 4 - 3x$, d'où $x = \frac{4}{3}$, ainsi $B = (\frac{4}{3}, 0)$. On passe maintenant au paramétrage; on peut choisir les paramétrisations suivantes:

   1. $\Gamma_2(t) = (\frac{4}{3} - t, 0)$ avec $t \in [0, \frac{4}{3}] \implies x'(t) = -1,\ y'(t) = 0$, alors

$$\int_{\Gamma_2} xy^2\,dx + x^2y\,dy \quad = \quad \int_0^{\frac{4}{3}} \left((\frac{4}{3} - t)(0^2)(-1) + 0(\frac{4}{3} - t)^2(0) \right) dt = \int_0^{\frac{4}{3}} 0dt = \boxed{0}.$$

   2. $\Gamma_3(t) = (-t, -t)$ avec $t \in [0, 4] \implies x'(t) = -1,\ y'(t) = -1$, alors

$$\int_{\Gamma_3} xy^2\,dx + x^2y\,dy \quad = \quad \int_0^4 \left((-t)(-t^2)(-1) + (-t)(-t)^2(-1) \right) dt = 2\int_0^4 t^3 dt = 2\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^4 = 2 \times 4^3 = \boxed{128}.$$

   3. $\Gamma_1(t) = (\frac{4-t^2}{3}, t)$ avec $t \in [-4, 0] \implies x'(t) = \frac{-2t}{3},\ y'(t) = 1$, alors

$$\int_{\Gamma_1} xy^2\,dx + x^2y\,dy \quad = \quad \int_{-4}^0 \left((\frac{4-t^2}{3})t^2(-1) + t(\frac{4-t^2}{3})^2(1) \right) dt = \int_{-4}^0 \left(-(\frac{4-t^2}{3})t^2 + t(\frac{4-t^2}{3})^2 \right) dt$$

   on pourrait développer le polynôme et intégrer pour trouver le résultat, mais on va plutôt utiliser le résultat de 1), comme $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ est un arc fermé, $\int_\Gamma xy^2\,dx + x^2y\,dy = 0$, d'où $\int_{\Gamma_1} xy^2\,dx + x^2y\,dy = -\int_{\Gamma_2} xy^2\,dx + x^2y\,dy - \int_{\Gamma_3} xy^2\,dx + x^2y\,dy = 0 - 128 = \boxed{-128}$. .

3) On sait d'après 1) que $xy^2\,dx + x^2y\,dy$ est une forme exacte donc elle admet des primitives; si une fonction f est une primitive de $xy^2\,dx+x^2y\,dy \implies \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 \implies f = \frac{x^2y^2}{2} + g(y) \text{ et} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y \implies \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \implies g \text{ est constante} \end{cases}$

On peut donc choisir $g = 0$ d'où $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2}$ est une primitive de $xy^2\,dx + x^2y\,dy$. En utilisant f on obtient

1. $\int_{\Gamma_1} xy^2\,dx + x^2y\,dy = f(B) - f(A) = \frac{(\frac{4}{3})^2\times 0^2}{2} - \frac{(-4)^2\times(-4)^2}{2} = -\frac{4^4}{2} = \boxed{-128}$
2. $\int_{\Gamma_2} xy^2\,dx + x^2y\,dy = f(O) - f(B) = 0 - 0 = \boxed{0}$
3. $\int_{\Gamma_3} xy^2\,dx + x^2y\,dy = f(A) - f(O) = 128 - 0 = \boxed{128}$

On retrouve bien les résultats de 2).

Exercice 3.6. Déterminer une fonction u, dont on précisera le domaine de définition, telle que:

$$du = \frac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$$

Solution: La forme différentielle $\frac{(x+2y)\,dx+y\,dy}{(x+y)^2}$ est définie lorsque $x+y \neq 0$ donc sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq -x\}$.

$$du = \frac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2} \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(x+2y)}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)}{(x+y)^2} + \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2} \quad ① \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2} \quad ② \end{cases}$$

De ① on aura $u = \displaystyle\int \frac{1}{x+y}dx + y\int \frac{1}{(x+y)^2}dx + g(y) = \ln|x+y| - \frac{y}{(x+y)^2} + g(y)$ et de ② on a $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{(x+y)^2}$ et d'autre part $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial(\ln|x+y| - \frac{y}{(x+y)^2} + g(y))}{\partial y} = \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{x}{(x+y)^2} + g'(y) = \dfrac{y}{(x+y)^2} + g'(y)$ d'où $g'(y) = 0$. On peut alors choir $g = 0$ d'où $\boxed{u(x,y) = \ln|x+y| - \dfrac{y}{(x+y)^2}}$, son domaine de définition est aussi D.

Exercice 3.7. Soit $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ avec:

$$P(x,y) = \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2y} \qquad \text{et} \qquad Q(x,y) = \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)}{xy^2}.$$

1) Montrer que, dans le domaine $D = \{(x,y); x > 0,\ y > 0\}$, ω est une forme différentielle totale.

2) Déterminer u dans D, telle que $du = \omega$.

3) Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \omega$ lorsque Γ est l'arc défini par: $x = t + \cos^2 t$, $y = 1 + \sin^2 t$ avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Solution:

1) Le calcul des dérivées partielles donne : $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{2x^2y^2 - 3y^4 - 3x^4}{x^2y^2} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, la forme ω est donc fermée. Le domaine $D = \{(x,y); x > 0,\ y > 0\}$ est convexe, en effet, si $M_0 = (x_0, y_0)$ et $M_1 = (x_1, y_1)$ sont des points de D, alors pour tout $t \in [0,1]$ on a $M_0 + t(M_1 - M_0) = (1-t)M_0 + tM_1 = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1) \in D$, car $(1-t)x_0 + tx_1 > 0$ et $(1-t)y_0 + ty_1 > 0$.
La forme ω est alors fermée sur un domaine convexe (donc étoilé) est alors totale (i.e. exacte) d'après le théorème de Poincaré.

2) On a $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = \dfrac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2y} = \dfrac{2x^2y^2+3x^4-y^4}{x^2y} = 2y + \dfrac{3x^2}{y} - \dfrac{y^3}{x^2}$ d'où
$u = 2y\displaystyle\int dx + \frac{1}{y}\int 3x^2 dx + y^3\int \frac{-1}{x^2}\,dx + g(y) = 2xy + \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} + g(y)$ d'autre part
$Q(x,y) = \dfrac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)}{xy^2} = 2x + \dfrac{3y^2}{x} - \dfrac{x^3}{y^2} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x - \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{3y^2}{x} + g'(y)$, d'où $g'(y) = 0$.

Comme g est constante on peut choisir $g = 0$ par suite $\boxed{u = 2xy + \dfrac{x^3}{y} + \dfrac{y^3}{x}}$.

3) L'arc Γ a pour origine $(x(0), y(0)) = (1,1)$ et d'extrémité $(x(2\pi), y(2\pi)) = (2\pi+1, 1)$, alors

$$\int_\Gamma \omega = u(2\pi+1,1) - u(1,1) = 2(2\pi+1) + \frac{1}{2\pi+1} + (2\pi+1)^3 - 4 \approx 397$$

Exercice 3.8.

1. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (y^2, x^2)$ sur la demi ellipse $x^2+4y^2-4=0; y \geqslant 0$ parcourue une fois dans le sens direct.
2. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (\cos(x), \sin(y))$ sur le cercle unité parcouru deux fois dans le sens des aiguilles d'une montre.
3. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ sur le triangle OAB avec $A = (1,0)$, $B = (0,1)$ parcouru une fois dans le sens direct.

Solution:

1. Comme $\dfrac{\partial(y^2)}{\partial y} = 2y \neq 2x = \dfrac{\partial(x^2)}{\partial x}$, le champ $\vec{V}$, n'est pas un gradient, on va calculer son travail en utilisant la définition.
   La courbe a pour équation $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ et $y \geqslant 0$, on pose alors $\frac{x}{2} = \cos t$ et $y = \sin t$, comme $y = \sin t \geqslant 0$ on aura $t \in [0, \pi]$.
   Ainsi la paramétrisation de la demi-ellipse γ est $\gamma(t) = (2\cos t, \sin t)$ avec $t \in [0,\pi]$, alors

$$Circulation(\vec{V}, \gamma) = \int_\gamma \vec{V} = \int_0^\pi \begin{pmatrix}\sin^2 t\\ 4\cos^2 t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} dt = \int_0^\pi (-2\sin^3 t + 4\cos^3 t)dt$$

$$= -2\int_0^\pi \sin^3 t dt + 4\int_0^\pi \cos^3 t dt = -2\int_0^\pi \sin t - \sin t\cos^2 t dt + 4\int_0^\pi \cos t - \cos t \sin^2 t dt$$

$$= -2\left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi + 4\left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^\pi = -2\left((1-\frac{1}{3}) - (-1+\frac{1}{3})\right) + 4(0-0) = \boxed{-\frac{8}{3}}$$

2. On a $\dfrac{\partial\cos(x)}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial\sin(y)}{\partial x}$, comme le champ de vecteurs est définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est un domaine étoilé d'après le théorème de Poincaré, c'est un champ de gradient, en particulier son travail est nul le long de tout arc fermé, en particulier le long du cercle unité C, ainsi $Circulation(\vec{V}, C) = 0$

3. Comme $\dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} = 2y \neq 2x = \dfrac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x}$, le champ $\vec{V}$, n'est pas un gradient, on va calculer son travail en utilisant la définition.

   Une paramétrisation du triangle est donnée par $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où
   $\Gamma_1(t) = (0,0) + t((1,0)-(0,0)) = (t,0)$ avec $t \in [0,1]$
   $\Gamma_2(t) = (1,0) + t((0,1)-(1,0)) = (1-t,t)$ avec $t \in [0,1]$
   $\Gamma_3(t) = (0,1) + t((0,0)-(0,1)) = (0,1-t)$ avec $t \in [0,1]$

   on a $Travail(\vec{V},\Gamma_1) = \displaystyle\int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$
   $Travail(\vec{V},\Gamma_2) = \displaystyle\int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2+t^2 \\ (1-t)^2-t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 -(1-t)^2-t^2+(1-t)^2-t^2 dt = \int_0^1 -2t^2 dt = -\frac{2}{3}$
   $Travail(\vec{V},\Gamma_3) = \displaystyle\int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ -(1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (1-t)^2 dt = \left[\frac{-(1-t)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$
   Par suite, $Travail(\vec{V},\Gamma) = Travail(\vec{V},\Gamma_1) + Travail(\vec{V},\Gamma_2) + Travail(\vec{V},\Gamma_3) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{0}$.

Exercice 3.9. Calculer le travail effectué par la force $\overrightarrow{F} = (y+z)\overrightarrow{i} + (x+z)\overrightarrow{j} + (x+y)\overrightarrow{k}$ pour déplacer une particule de l'origine O au point $C = (1,1,1)$:

1. le long de la droite (OC).
2. le long de la courbe $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$.

Même question pour la force $\overrightarrow{G} = (x+yz)\overrightarrow{i} + (y+xz)\overrightarrow{j} + (z+xy)\overrightarrow{k}$.
Solution:

A) On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} t\frac{\partial(x+z)}{\partial y} - \frac{\partial(x+z)}{\partial z} \\ \frac{\partial(y+z)}{\partial z} - \frac{\partial(x+z)}{\partial x} \\ \frac{\partial(x+z)}{\partial x} - \frac{\partial(x+y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \vec{O}$, comme le domaine de définition de $\overrightarrow{F}$ est $\mathbb{R}^3$ qui est étoilé, d'après le théorème de Poincaré, c'est un champ de gradient. On va déterminer un potentiel de $\overrightarrow{F}$ i.e. un fonction f telle que $\overrightarrow{grad} f = \overrightarrow{F}$. Alors
   $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y+z \implies f(x,y,z) = xy + xz + g(y,z)$,
   $x+z = \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + \dfrac{\partial g}{\partial y} \implies \dfrac{\partial g}{\partial y} = z \implies g(y,z) = yz + h(z) \implies f(x,y,z) = xy + xz + yz + h(z)$
   et enfin
   $x+y = \dfrac{\partial f}{\partial z} = x + y\dfrac{\partial h}{\partial z} \implies \dfrac{\partial h}{\partial z} = 0 \implies h$ est constante, que nous pouvons choisir nulle
   Ainsi $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ est un potentiel de $\overrightarrow{F}$,

   Par suite, le travail effectué par la force $\overrightarrow{F} = (y+z)\overrightarrow{i} + (x+z)\overrightarrow{j} + (x+y)\overrightarrow{k}$ pour déplacer une particule de l'origine $O = (0,0,0)$ au point $C = (1,1,1)$ ne dépend que de ces points, dans les deux cas on trouvera le même résultat: le travail de $\overrightarrow{F}$ pour déplacer une particule de l'origine O au point $C = (1,1,1)$ est égal à $f(1,1,1) - f(0,0,0) = 3 - 0 = \boxed{3}$

B) Pour le champ de force $\overrightarrow{G} = (x+yz)\overrightarrow{i} + (y+xz)\overrightarrow{j} + (z+xy)\overrightarrow{k}$, on trouve après calcul que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{G} = \vec{O}$ et comme le domaine de définition est $\mathbb{R}^3$, c'est un champ de gradient, la même démarche permet de montrer que $g(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} + xyz$ est un potentiel de $\overrightarrow{G}$.

Alors le travail de $\overrightarrow{F}$ pour déplacer une particule de l'origine O au point $C = (1,1,1)$ est égal à $g(1,1,1) - g(0,0,0) = \frac{3}{2} + 1 - 0 = \boxed{\dfrac{5}{2}}$

Exercice 3.10. Soit $\mathcal{D}$ le domaine limité par le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$ parcouru dans le sens direct.
Calculer à l'aide de la formule de Green-Riemann $\iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2)dxdy$
Solution: Le bord de $\mathcal{D}$ est la courbe (simple) C d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$ qui s'écrit $x^2 + (y-1)^2 = 1$, c'est dont le cercle centré en $(0,1)$ et de rayon 1, une paramétrisation de C est donnée par $\begin{cases} x = \cos t & \text{avec } t \in [0, 2\pi] \\ y - 1 = \sin t \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = \cos t & \text{avec } t \in [0, 2\pi] \\ y = \sin t + 1 \end{cases}$
D'après, la formule de Green-Riemann $\iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2)dxdy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\mathcal{C}^+} Pdx + Qdy$, par identification, on aurait $x^2 - y^2 = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$, on doit choisir P et Q pour que l'égalité ait lieu: on peut choisir, $\frac{\partial Q}{\partial x} = x^2 - y^2$ et donc $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ d'où $Q = \frac{x^3}{3} - xy^2$ et $P = 0$. Avec ce choix, de la forme différentielle et de la paramétrisation on aura

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2)dxdy = \int_{\mathcal{C}^+} (\frac{x^3}{3} - xy^2)dy = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^3 t}{3} - \cos t(\sin t + 1)^2\right) \cos t \, dt$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos^4 tdt - \int_0^{2\pi} \cos^2 tdt - 2\int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 tdt - \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \, dt.$$

On va calculer chacune des intégrales

i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 tdt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$

ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 tdt = \left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$

iii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \, dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (\sin 2t)^2 \, dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{\cos 4t}{2} \, dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$

iv) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4 tdt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t)^2 dt = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2})^2 dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{(\cos 2t)^2}{4} dt$
$\displaystyle= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{\cos 4t}{2}}{4} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{1}{8} + \frac{\cos 4t}{8} dt = \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{\cos 4t}{8} dt$
$\displaystyle= \left[\frac{3t}{8} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 4t}{32}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$

D'où $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2)dxdy = \frac{1}{3} \times \frac{3\pi}{4} - \pi - 2 \times 0 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \pi - \frac{\pi}{4} = \boxed{-\pi}$.

Exercice 3.11. Calculer l'intégrale curviligne I le long de la courbe fermée γ constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$, orientée dans le sens direct où $I = \displaystyle\int_\gamma (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$.
Vérifier le résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.
Solution: La courbe fermée γ est formée de deux arcs: γ_1 va de $(0,0)$ à $(1,1)$ en suivant la courbe $y = x^2$ et γ_2 va de $(1,1)$ à $(0,0)$ et suit la courbe $x = y^2$. On peut donc prendre pour paramétrisation:

$\gamma_1(t)=(x(t),y(t))=(t,t^2)$ avec $t\in[0,1]$ orienté dans le sens direct et $\gamma_2=(x(t),y(t))=(t^2,t)$ avec $t\in[0,1]$, mais orienté dans le sens inverse. Alors,

$$I=\int_\gamma (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy=\int_{\gamma_1^+}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy+\int_{\gamma_2^-}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy.$$

où $\displaystyle\int_{\gamma_1^+}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy=\int_0^1((2t^3-t^2).(1)+(t+t^4).(2t))dt=\int_0^1(t^2+2t^3+2t^5)dt=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$

$$\int_{\gamma_2^-}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy=-\int_0^1((2t^3-t^4).(2t)+(t^2+t^2).(1))dt=-\int_0^1(2t^2+4t^4-2t^5)dt=-(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{1}{3})=-\frac{17}{15}$$

Ainsi, $\displaystyle I=\int_\gamma(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy=\frac{7}{6}-\frac{17}{15}=\boxed{\frac{1}{30}}$.
Vérifions maintenant le résultat à l'aide de la formule de Green-Riemann.
Le domaine D bordé par la courbe γ est $D=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x},\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$ et $\gamma=\partial D$. On a d'après la formule de Green-Riemann:

$$\int_\gamma(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy=\iint_D(\frac{\partial(x+y^2)}{\partial x}-\frac{\partial(2xy-x^2)}{\partial y})dxdy=\iint_D(1-2x)dxdy=\int_0^1(1-2x)(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}dy)dx$$

$$=\int_0^1(1-2x)(\sqrt{x}-x^2)dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2-2x^{\frac{3}{2}}+2x^3)dx=\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{3}-\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{x^4}{2}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{30}}.$$

4. Intégrales de Surface

Exercice 4.1. Soient $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ une fonction et $\overrightarrow{V}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un champ vectoriel suffisamment réguliers. Parmi les opérateurs aux dérivées partielles listés ci-dessous, quels sont ceux que l'on peut appliquer à la fonction f ? Et au champ $\overrightarrow{V}$?

	$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ fonction		$\overrightarrow{V}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ champ vectoriel	
gradient $\left(\overrightarrow{\nabla}\text{ ou }\overrightarrow{\texttt{grad}}\right)$	oui ☑	non ☐	oui ☐	non ☑
divergence $\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\text{ ou }\texttt{div}\right)$	oui ☐	non ☑	oui ☑	non ☐
rotationnel $\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\text{ ou }\overrightarrow{\texttt{rot}}\text{ ou }\overrightarrow{\nabla}\times\right)$	oui ☐	non ☑	oui ☑	non ☐

Exercice 4.2. Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z)=(x,y,-z)$ à travers la demi-sphère $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ z\geqslant 0.\end{cases}$

Solution: On utilise les coordonnées sphériques pour obtenir une paramétrisation de la demi-sphère supérieure

$$S=\left\{s(\theta,\phi)=(\cos\theta\cos\phi,\sin\theta\cos\phi,\sin\phi)\mid\quad\theta\in[-\pi,\pi],\quad\phi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

La normale déterminée par cette paramétrisation (voir le cours) est donnée par

$$\frac{\partial s}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial s}{\partial\phi}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\cos\phi\\ \cos\theta\cos\phi\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-\cos\theta\sin\phi\\ -\sin\theta\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\phi\cos\theta\\ \cos^2\phi\sin\theta\\ \cos\phi\sin\phi\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$flux(\vec{V},S) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{V}(s(\theta,\phi))\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial s}{\partial\phi}\right)d\phi d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi\\ \sin\theta\cos\phi\\ -\sin\phi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\cos^2\phi\\ \sin\theta\cos^2\phi\\ \cos\phi\sin\phi\end{pmatrix}\ d\phi d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta\cos^3\phi+\sin^2\theta\cos^3\phi-\sin^2\phi\cos\phi)\ d\phi d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos^2\theta+\sin^2\theta)\cos^3\phi-\sin^2\phi\cos\phi)\ d\phi d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3\phi-\sin^2\phi\cos\phi)\ d\phi d\theta = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\phi-\sin^2\phi\cos\phi-\sin^2\phi\cos\phi)\ d\phi = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\phi-2\sin^2\phi\cos\phi)\ d\phi$$

$$= 2\pi\left[\sin\phi-\frac{2}{3}\sin^3\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi(1-\frac{2}{3}) = \boxed{\frac{2\pi}{3}}.$$

Exercice 4.3. Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$ le long de l'ellipse $\mathcal{E}$ (après avoir préciser le sens du parcours) d'équations $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x+z=1\end{cases}$

1. directement. 2. En utilisant la formule de Stokes

Solution:

L'ellipse $\mathcal{E}$ est obtenue comme intersection du cylindre d'équation $x^2+y^2=1$ avec le plan d'équation $z=1-x$.

On a $x+z=1$, d'où $z=x-1$, et les En utilisant les coordonnées cylindriques on obtient une paramétrisation de l'ellipse $\mathcal{E}$: $\begin{cases}x(\theta)=\cos\theta\\ y(\theta)=\sin\theta \qquad\qquad \theta\in[0,2\pi].\\ z(\theta)=1-x(\theta)=1-\cos\theta\end{cases}$

1. La circulation du champ $\vec{V}$ le long de la courbe $\mathcal{E}$ est égale à:

$$\int_{\mathcal{E}}\vec{V} = \int_0^{2\pi}\vec{V}(x(\theta),y(\theta),z(\theta)).\begin{pmatrix}x'(\theta)\\ y'(\theta)\\ z'(\theta)\end{pmatrix}\ d\theta = \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\sin\theta-(1-\cos\theta)\\ (1-\cos\theta)-\cos\theta\\ \cos\theta-\sin\theta\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}((-\sin^2\theta+\sin\theta+\sin\theta\cos\theta)+(\cos\theta-2\cos^2\theta)+(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta))\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(-2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta)\ d\theta$$

$$= \left[-2\theta-\cos\theta+\sin\theta+\sin^2\theta\right]_0^{2\pi} = \boxed{-4\pi}$$

2. La surface S de bord l'ellipse $\partial S=\mathcal{E}$ est l'ellipse pleine de paramétrisation

$$S=\{s(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta,1-r\cos\theta)\mid r\in[0,1],\theta\in[0,2\pi]\}.$$

On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}y-z\\ z-x\\ x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ -2\end{pmatrix}$ et

$$\frac{\partial s}{\partial r}\wedge\frac{\partial s}{\partial\theta}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\ 0\\ r\end{pmatrix}.$$

D'où $flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V},S)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}(s(r,\theta))\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial r}\wedge\frac{\partial s}{\partial \theta}\right)dr\;d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r\\0\\r\end{pmatrix}\;dr\;d\theta=$
$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 -4rdr\;d\theta=-4\pi.$

Finallement la formule de Stokes nous donne: $Circulation(\vec{V},\partial S)=flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V},S)=\boxed{-4\pi}$ on retrouve ainsi le résultat de 1.

Exercice 4.4. On considère l'intégrale $\int_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, où C est le cercle d'équations $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x+y+z=0\end{cases}$ Calculer cette intégrale en appliquant la formule de Stokes.
Retrouver le résultat à l'aide d'un calcul direct.

Solution:

1. On a d'une part $\displaystyle\int_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz=circulation(\vec{V},C)$ où $\vec{V}=(y+z)\vec{i}+(z+x)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$. et d'autre part $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}y+z\\z+x\\x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

   Comme $\partial S=C$, la formule de Stokes nous donne:
   $$\int_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz=Circulation(\vec{V},C)=flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V},S)=\boxed{0}.$$

2. La forme $\omega=(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$ est exacte, car elle est définie sur $\mathbb{R}^3$ qui est étoilé et $\dfrac{\partial(y+z)}{\partial y}=1=\dfrac{\partial(z+x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial(z+x)}{\partial z}=1=\dfrac{\partial(x+y)}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial(y+z)}{\partial z}=1=\dfrac{\partial(x+y)}{\partial x}$ d'où $\displaystyle\int_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz=\boxed{0}$, on retrouve ainsi le résultat en 1.

Remarque: On peut aussi montrer que $\omega=df$ où $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ et obtenir que $\displaystyle\int_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz=\boxed{0}$, puisque C est une courbe fermée.

Exercice 4.5. Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ à travers la sphère $x^2+y^2+z^2=R^2$: 1) Directement 2) A l'aide le la formule d'Ostrogradski.

Solution: On note par S_R la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=R^2$ et par B_R la boule définie par l'inéquation $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

1. On utilise les coordonnées sphériques pour obtenir une paramétrisation de la sphère S_R
   $$S_R=\left\{s(\theta,\phi)=(R\cos\theta\cos\phi,R\sin\theta\cos\phi,R\sin\phi)|\quad\theta\in[-\pi,\pi],\quad\phi\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$
   On a
   $$\frac{\partial s}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial s}{\partial\phi}=\begin{pmatrix}-R\sin\theta\cos\phi\\R\cos\theta\cos\phi\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-R\cos\theta\sin\phi\\-R\sin\theta\sin\phi\\R\cos\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R^2\cos\theta\cos^2\phi\\R^2\sin\theta\cos^2\phi\\R^2\cos\phi\sin\phi\end{pmatrix}.$$
   Alors, $flux(\vec{V},S_R)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\vec{V}(s(\theta,\phi))\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial s}{\partial\phi}\right)d\phi d\theta$
   $=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}R^2\cos^2\theta\cos^2\phi\\R^2\sin^2\theta\cos^2\phi\\R^2\sin^2\phi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R^2\cos\theta\cos^2\phi\\R^2\sin\theta\cos^2\phi\\R^2\cos\phi\sin\phi\end{pmatrix}\;d\phi d\theta=R^4\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta\cos^4\phi+\sin^3\theta\cos^4\phi+$

$\sin^3\phi\cos\phi)\,d\phi d\theta = R^4\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}((\cos^3\theta+\sin^3\theta)\cos^4\phi+\sin^3\phi\cos\phi)\,d\phi d\theta.$

D'autre part $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^3\theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta(1-\sin^2\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta-\cos\theta\sin^2\theta)d\theta = \left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}=0;$
$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3\theta d\theta = 0$ et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\phi\cos\phi d\phi = 0$ car les fonctions intégrées sont impaires.
Finalement,

$$flux(\vec{V},S_R) = R^4\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}((\cos^3\theta+\sin^3\theta)\cos^4\phi+\sin^3\phi\cos\phi)\,d\phi d\theta = \boxed{0}$$

2. La formule d'Ostrogradski donne $flux(\vec{V},S_R) = \iiint_{B_R} div(\vec{V})dxdydz;$

   comme $div(\vec{V})(x,y,z) = 2x+2y+2z$, est impaire $div(\vec{V})(-x,-y,-z) = -div(\vec{V})(x,y,z)$ et que B_R est symétrique par rapport à l'origine $(0,0,0)$, l'intégrale $\iiint_{B_R} div(\vec{V})dxdydz = 0$

   D'où, $flux(\vec{V},S_R) = \iiint_{B_R} div(\vec{V})dxdydz = \boxed{0}$, on retrouve ainsi le résultat de 1.

Exercice 4.6. On considère la boite cylindrique S composée du cylindre d'équation $x^2+y^2=a^2$, $0\leqslant z\leqslant b$ $(a>0$ et $b>0)$ et des deux disques de rayon a aux niveaux $z=0$ et $z=b$.
On définit le champ de vecteurs $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$ par $\vec{v}(x,y,z) = x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$.

1. Déterminer si $\vec{v}$ est un champ de gradients.
2. Calculer directement le flux de $\vec{v}$ à travers S.
3. Calculer le flux de $\vec{v}$ à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradski.

Solution:

1. $\vec{v}(x,y,z) = x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ est bien un champ de vecteurs gradient, puisque $\vec{v} = gradf$ où $f(x,y,z) = \frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+\frac{z^3}{3}$. (cette question n'est pas utilisée par la suite)
   Notons $S_0 = \{(x,y,z)\mid x^2+y^2=a^2,\ 0<z<b\} = \{s(\theta,z) = (a\cos\theta, a\sin\theta, z)\mid \theta\in[-\pi,\pi],\ 0<z<b\}$ le cylindre,
   $S_1 = \{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant a^2,\ z=0\} = \{s(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)\mid \theta\in[-\pi,\pi],\ r\in[0,1]\}$ le disque au niveau $z=0$ et
   $S_2 = \{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant a^2,\ z=b\} = \{s(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, b)\mid \theta\in[-\pi,\pi],\ r\in[0,1]\}$ le disque au niveau $z=b$. Alors S est la réunion disjointes de S_0,S_1 et S_2 i.e. $S = S_0\cup S_1\cup S_2$ et par additivité de l'intégrale on a

$$flux(\vec{v},S) = flux(\vec{v},S_0)+flux(\vec{v},S_1)+flux(\vec{v},S_2).$$

2. On calcul maintenant le flux de $\vec{v}$ à travers chacune des surfaces S_0, S_1 et S_3, en utilisant leurs paramétrisations.

   i) <u>Pour S_0 :</u> on a $\frac{\partial s}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial s}{\partial z} = \begin{pmatrix}-a\sin\theta\\ a\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\cos\theta\\ a\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$ et

$$flux(\vec{v}, S_0) = \int_0^b \int_{-\pi}^{\pi} \vec{v}(s(\theta, z)) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial s}{\partial z}\right) d\theta dz = \int_0^b \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} a^2\cos^2\theta \\ a^2\sin^2\theta \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta dz =$$

$$\int_0^b dz \int_{-\pi}^{\pi} (a^3\cos^3\theta + a^3\sin^3\theta) d\theta = \boxed{0}.$$

(puisque $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3\theta d\theta = 0$ voir l'exercice précédent)

ii) Pour S_1 : on a $\dfrac{\partial s}{\partial r} \wedge \dfrac{\partial s}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ et S_1 est orientée vers les z négatifss

d'où

$$flux(\vec{v}, S_1) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \vec{v}(s(r, \theta)) \cdot \left(-\frac{\partial s}{\partial r} \wedge \frac{\partial s}{\partial \theta}\right) dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \begin{pmatrix} r^2\cos^2\theta \\ r^2\sin^2\theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} dr d\theta =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a 0 dr d\theta = \boxed{0}.$$

iii) Pour S_2 : on a $\dfrac{\partial s}{\partial r} \wedge \dfrac{\partial s}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ et S_2 est orientée vers les z positifs

d'où

$$flux(\vec{v}, S_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \vec{v}(s(r, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial r} \wedge \frac{\partial s}{\partial \theta}\right) dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \begin{pmatrix} r^2\cos^2\theta \\ r^2\sin^2\theta \\ b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a b^2 r \, dr d\theta =$$

$$\boxed{a^2 b^2 \pi}.$$

Finalement, S est la réunion disjointes de S_0,S_1 et S_2, le flux de $\vec{v}$ à travers S est donc égal à

$$flux(\vec{v}, S) = flux(\vec{v}, S_0) + flux(\vec{v}, S_1) + flux(\vec{v}, S_2) = 0 + 0 + a^2b^2\pi = \boxed{a^2b^2\pi}$$

3. La surface S est fermée et est le bord du cylindre plein $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ 0 < z < b\} = \{(r\cos\theta, a\sin\theta, z) \mid \theta \in [-\pi, \pi],\ r \in [0, a],\ z \in [0, b]\}$ donc $S = \partial V$.

   On peut alors utiliser la formule d'Ostrogradski pour calculer le flux d'un champ de vecteurs à travers la surface S.

   On a $div(\vec{v}) = 2x + 2y + 2z$, et en utilisant les coordonnées cylindriques on aura

$$\iiint_V div(\vec{v}) dx dy dz = 2 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz = 2 \int_0^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a (r\cos\theta + r\sin\theta + z) r dr d\theta dz$$

$$= 2 \int_0^b dz \int_0^a r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta + 2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_0^b z dz = 0 + \pi a^2 b^2 = a^2 b^2 \pi.$$

   Alors, d'après la formule formule d'Ostrogradski $flux(\vec{v}, S) = \iiint_V div(\vec{v}) dx dy dz = \boxed{a^2b^2\pi}$ on retrouve le résultat de 2.