

Outils Mathématiques 4: corrigés des exercices 2 et 3 de la feuille $n^{\circ}4$

Exercice 2: †On considère trois figures planes dans le plan Oxz :

- Un rectangle R dont les sommets ont comme coordonnées $(0,0), (a,0), (a, h)$ et $(0, h)$.
- Un triangle T dont les sommets ont comme coordonnées $(0,0), (a,0)$ et $(0, h)$.
- Un demi-cercle C de centre $(0,0)$, de rayon a et situé dans le demi-plan $x \geq 0$.

Pour chacune de ces 3 figures, calculer: (a) l'aire S , (b) l'abscisse c de son centre de gravité, (c) le volume V du solide obtenu par révolution de la figure autour de l'axe Oz .

Comparer $2\pi cS$ et V pour ces figures ? Pouvez-vous formuler rigoureusement votre conclusion et la démontrer en toute généralité ?

Solution: On va calculer pour toute surface, l'aire S , l'abscisse c de son centre de gravité et le volume du solide obtenu par révolution de la figure autour de l'axe Oz . Finalement on vérifie la relation $V = 2\pi \times S \times c$

1. R est le rectangle dont les sommets $(0,0), (a,0), (a, h)$ et $(0, h)$

(a) $S_R = \text{Aire}(R) = ah$

(b) $x_R = \frac{1}{S_R} \iint_R x dx dy = \frac{1}{ah} \int_0^a x dx \int_0^h dy = \frac{1}{ah} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a \times [y]_0^h = \frac{a}{2}$

(c) $V_R = \text{Volume (du cylindre de base "le disque du plan xOy centré en } (0,0) \text{ et de rayon } a" \text{ et "de hauteur } h") = \pi a^2 h.$

(d) Vérification: $2\pi \times S_R \times x_R = 2\pi \times ah \times \frac{a}{2} = \pi a^2 h = V_R.$

2. T le triangle de sommets $(0,0), (a,0)$ et $(0, h)$

(a) $S_T = \text{Aire}(T) = \frac{1}{2}ah$

(b) $x_T = \frac{1}{S_T} \iint_T x dx dy = \frac{2}{ah} \int_0^a \left(\int_0^{-\frac{h}{a}x+h} dy \right) x dx = \frac{2}{ah} \int_0^a \left(-\frac{h}{a}x^2 + hx \right) dx = \frac{2}{ah} \left[-\frac{h}{a} \frac{x^3}{3} + h \frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{2}{ah} \times \frac{a^2 h}{6} = \frac{a}{3}$

(c) $V_T = \text{Volume (du cône de base "le disque du plan xOy centré en } (0,0) \text{ et de rayon } a" \text{ et "de sommet } (0,0,h)") = \frac{1}{3}\pi a^2 h.$

(d) Vérification: $2\pi \times S_T \times x_T = 2\pi \times \frac{1}{2}ah \times \frac{a}{3} = \frac{1}{3}\pi a^2 h = V_T.$

3. C le demi-cercle de centre $(0,0)$, de rayon a et situé dans le demi-plan $x \geq 0$.

(a) $S_C = \text{Aire}(\frac{1}{2} \text{ Disque de rayon } a) = \frac{1}{2}\pi a^2$

(b) $x_C = \frac{1}{S_C} \iint_C x dx dy = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta dr d\theta = \frac{2}{\pi a^2} \int_0^a r^2 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{2}{\pi a^2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a \times [\sin \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi a^2} \times \frac{a^3}{3} \times 2 = \frac{4a}{3\pi}$

(c) $V_C = \text{Volume (de la boule centrée en } (0,0,0) \text{ et de rayon } a) = \frac{4}{3}\pi a^3.$

(d) Vérification: $2\pi \times S_C \times x_C = 2\pi \times \frac{1}{2}\pi a^2 \times \frac{4a}{3\pi} = \frac{4}{3}\pi a^3 = V_C.$

4. **Théorème 0.1 (de Guldin)** Soit D un domaine du demi-plan $\{(x, z) \mid x \geq 0\}$. On note par S_D l'aire de D et x_D l'abscisse de son centre de gravité.

Soit Ω le solide de $\mathbb{R}^3$ obtenu en faisant tourner D autour de l'axe Oz . Alors

$$\boxed{Vol(\Omega) = 2\pi \times S_D \times x_D}$$

(une esquisse de la démonstration): En coordonnées cylindriques (r, θ, z) , on note par D_θ l'intersection de Ω avec le plan vertical faisant un angle θ avec le plan xOz . Alors, par le théorème de Fubini, on a $Vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\iint_{D_\theta} r dr dz \right) d\theta$ et l'abscisse du centre de gravité

$$\text{de } D_\theta \quad r_{D_\theta} = \frac{1}{S_{D_\theta}} \iint_{D_\theta} r dr dz \implies \iint_{D_\theta} r dr dz = r_{D_\theta} S_{D_\theta}.$$

Maintenant, si on note par h_θ la rotation d'axe Oz et d'angle θ , alors $h_\theta(D) = D_\theta$ et $h_\theta(x_D) = r_{D_\theta}$.

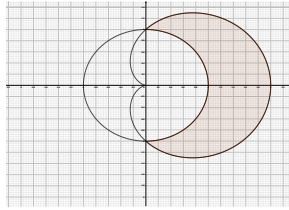
Par suite, par le théorème de changement de variables: $x_D S_D = \iint_D x dx dz = \iint_{D_\theta} r dr dz = r_{D_\theta} S_{D_\theta}$.

$$\text{Ainsi, } Vol(\Omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\iint_{D_\theta} r dr dz \right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (x_D S_D) d\theta = x_D S_D \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi x_D S_D \quad \square$$

Exercice 3: Déterminer le centre de gravité de la surface située à l'extérieur du cercle de rayon 1 et délimitée par la cardioïde $\rho = 1 + \cos \theta$.

Solution:

En coordonnées polaire le domaine, pour $(\rho, \theta) \in D$ on a $1 \leq \rho \leq 1 + \cos \theta \implies \cos \theta \geq 0 \implies \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ainsi $D = \{(\rho, \theta) \mid \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], 1 \leq \rho \leq 1 + \cos \theta\}$, alors



$$\begin{aligned} \text{Aire}(D) &= \iint_D dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^{1+\cos \theta} r dr \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^{1+\cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ((1 + \cos \theta)^2 - 1) d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta + 2 \cos \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2} + 2 \cos \theta \right) d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2\theta + 2\theta}{4} + 2 \sin \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi + 8}{4}}. \\ x_G &= \frac{1}{\text{Aire}(D)} \iint_D x dx dy = \frac{1}{\text{Aire}(D)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^{1+\cos \theta} r^2 \cos \theta dr \right) d\theta = \frac{1}{\text{Aire}(D)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^{1+\cos \theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{3 \text{Aire}(D)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta ((1 + \cos \theta)^3 - 1) d\theta = \frac{1}{3 \text{Aire}(D)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (\cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{3 \text{Aire}(D)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4 \theta + 3 \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) + 3 \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{2}{3 \text{Aire}(D)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2} \right)^2 + 3 \cos \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + 3 \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{2}{3 \text{Aire}(D)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{\cos 4\theta + 1}{2} + 2 \cos 2\theta + 1 \right) + 3 \cos \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + 3 \frac{\cos 2\theta + 1}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{2}{3 \text{Aire}(D)} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\sin 4\theta}{8} + \frac{\theta}{2} + \sin 2\theta + \theta \right) + 3 \sin \theta - \sin^3 \theta + 3 \left(\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3\mathcal{A}\text{ire}(D)} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{0}{8} + \frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\pi}{2} \right) + 3 - 1 + 3 \left(\frac{0}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{8}{3(\pi + 8)} \left(\frac{15\pi}{16} + 2 \right) = \frac{15\pi + 32}{6\pi + 48}.$$

Pour des raisons de symétrie, $y_G = 0$. Ainsi le centre de gravité est $G = \left(\frac{15\pi + 32}{6\pi + 48}, 0 \right)$.