Unité d'enseignement OM4

Examen du 12 mai 2021 de 11h à 13h

Vous disposez de **2h** pour répondre aux questions des exercices suivants.
Le sujet comporte **5** exercices indépendants (+ un exercice bonus) et est imprimé recto-verso.
Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.
Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1 *(4,5 points)*

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(t)dt.$
2. $I_2 = \displaystyle\iint_{D_1} xe^{-xy}dxdy$ où $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.
3. $I_3 = \displaystyle\iiint_{\Omega} (x^2+y^2)dxdydz$ où Ω est le domaine borné de $\mathbb{R}^3$, délimité par le paraboloïde $z = x^2+y^2$ et le plan $z = 4$.
   (indication : on pourra utiliser les coordonnées cylindriques)

Exercice 2 *(4 points)*

Pour les intégrales données ci-dessous, dessiner le domaine d'intégration dans $\mathbb{R}^2$ puis calculer ces intégrales doubles en changeant l'ordre d'intégration des variables :

$$I = \int_0^1 \left(\int_{2x}^{3x} y\, dy\right) dx, \qquad J = \int_0^2 \left(\int_{\frac{3x}{2}}^{\sqrt{\frac{9x}{2}}} dy\right) dx.$$

Exercice 3 *(4 points)*

Soient le domaine de $\mathbb{R}^2$ formé de l'ellipse défini par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leqslant 1\}$ et C le bord de D orienté dans le sens direct(celui du cercle trigonométrique).
On considère l'intégrale curviligne $I = \displaystyle\int_C \omega$ où la forme différentielle $\omega = (y+y^2)dx + 2x^2dy$.

1) Déterminer s'il existe une fonction f telle que $\omega = df$.
2) Calculer I en utilisant une paramétrisation de C.
3) Calculer I en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 4 *(5 points)*

Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\vec{V}(x,y,z) = x^2y\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$.

1. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$.
2. Déterminer une paramétrisation du cercle C obtenu par l'intersection de la demi-sphère : $x^2+y^2+z^2 = 16$, $z \geqslant 0$ et du cylindre : $x^2+y^2 = 4$.
3. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}$ le long de la courbe C, orientée dans le sens direct (celui du cercle trigonométrique).
4. Retrouver le résultat en utilisant la formule de Stokes.
   (Indication : on pourra utiliser le disque de bord C)

Exercice 5 *(3,5 points)*

Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\vec{V}(x,y,z) = x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \vec{i} + y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \vec{j} + z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \vec{k}$$

1. Montrer que $\mathrm{div}\,\vec{V}(x,y,z) = 4\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
2. Calculer, en utilisant la formule d'Ostrogradski, le flux (sortant) du champ de vecteurs à travers la surface formée du bord du domaine $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 2\}$
   (indication : on pourra utiliser les coordonnées sphériques)

Exercice 6 *(Bonus : 2 points)*

1. Déterminer le domaine de convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3}$.
2. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $\frac{1}{n} \leqslant n^{(-1)^n} \leqslant n$.

   En déduire le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$.
3. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$ on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)x^{2n} = \frac{x^4}{(1-x^2)^2}$.