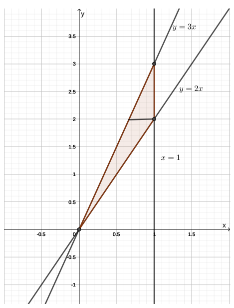
Unité d'enseignement OM4

Corrigé de l'examen du 12 mai 2021

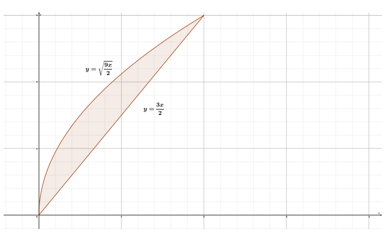
Exercice 1.

1. $I_1 = \int_0^{\pi} \sin(t)\cos(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(2t)dt = \left[\frac{-\cos(2t)}{4}\right]_0^{\pi} = \boxed{0}$.
2. $I_2 = \iint_{D_1} xe^{-xy}dxdy = \int_0^1 (\int_0^1 xe^{-xy}dy)dx = \int_0^1 \left[-e^{-xy}\right]_0^1 dx = \int_0^1 (-e^{-x}+1)dx = \left[e^{-x}+x\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{e}}$
3. En coordonées cylindriques $\Omega = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{z},\ 0 \leqslant z \leqslant 4\}$ et $dxdydz = rdrd\theta dz$, d'où
$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (\int_0^{\sqrt{z}} r^3dr)dz = 2\pi\int_0^4 \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{z}} dz = 2\pi\int_0^4 \frac{z^2}{4}dz = 2\pi\left[\frac{z^3}{12}\right]_0^4 = \boxed{\frac{32\pi}{3}}$.

Exercice 2.



$$I = \int_0^1 \left(\int_{2x}^{3x} y\, dy\right) dx = \int_0^2 y\left(\int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} dx\right)dy + \int_2^3 y\left(\int_{\frac{y}{3}}^{1} dx\right)dy = \boxed{\frac{5}{6}}$$



$$J = \int_0^2 \left(\int_{\frac{3x}{2}}^{\sqrt{\frac{9x}{2}}} dy\right)dx = \int_0^3 \left(\int_{\frac{2y^2}{9}}^{\frac{2y}{3}} dx\right)dy = \boxed{1}.$$

Exercice 3.

1) Comme $\frac{\partial P}{\partial y} = 1+2y \neq 4x = \frac{\partial Q}{\partial x}$, il n'existe alors pas de fonction f telle que $\omega = df$.

2) Une paramétrisation de C est donnée par $\gamma(t) = (2\cos(t), 4\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, d'où

$$I = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 4\sin(t)+16\sin^2(t) \\ 8\cos^2(t)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 4\cos(t)\end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi}(-8\sin^2(t) - 32\sin^3(t) + 32\cos^3(t))dt = \boxed{-8\pi}.$$

3) D'après Green-Riemann

$$I = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \iint_D (4x-1-2y)dxdy = \iint_D (4x-2y)dxdy - Aire(D) = -2\times 4\times\pi = \boxed{-8\pi}.$$

car, par symétrie, $\iint_D (4x-2y)dxdy = 0$.

Exercice 4.

1. $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x^2 y \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x^2 \end{pmatrix} = -x^2 \vec{k}.$
2. On note C la courbe intersection, donc $C = \{x^2 + y^2 = 4,\ z = 2\sqrt{3}\}$ et une paramétrisation est donnée par $C = \{(2\cos t, 2\sin t, 2\sqrt{3}) \mid t \in [0, 2\pi]\}$
3. Le travail du champ de vecteurs $\vec{V}$ le long de la courbe C, orientée dans le sens direct est :
$$Travail(\vec{V}, C) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 8\cos^2 t \sin t \\ 1 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (-16\cos^2 t \sin^2 t + 2\cos t) dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-4\sin^2 2t + 2\cos t) dt = \int_0^{2\pi} (-2(1 - \cos 4t) + 2\cos t) dt = \left[-2t + \frac{\sin 4t}{2} + 2\sin t\right]_0^{2\pi} = \boxed{-4\pi}.$$
4. On pose $S = \{x^2 + y^2 \leqslant 4,\ z = 2\sqrt{3}\}$ (orientée par $\vec{k}$), son bord est C.
Alors, la formule de Stokes donne :
$$Travail(\vec{V}, C) = Flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}, S) = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}.\vec{k} dxdy = \iint_S -x^2 dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 -(r\cos(\theta))^2 r dr d\theta$$
$$= -\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \int_0^2 r^3 dr = -\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2(\theta)}{2} d\theta \int_0^2 r^3 dr = \boxed{-4\pi}.$$

Exercice 5.

1. On a $\text{div}\,\vec{V} = \dfrac{\partial(x\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial x} + \dfrac{\partial(y\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial y} + \dfrac{\partial(z\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial z}$
D'autre part $\frac{\partial(x\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial x} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ et par symétrie $\frac{\partial(y\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ et $\frac{\partial(z\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial z} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
Ainsi, $\text{div}\,\vec{V} = 3\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 3\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \boxed{4\sqrt{x^2+y^2+z^2}.}$
2. En coordonnées sphériques, $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) \mid 1 \leqslant r \leqslant \sqrt{2},\ \theta \in [0, 2\pi],\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$ et la formule d'Ostrogradski nous donne :
$$Flux(\vec{V}, S) = \iiint_\Omega \text{div}\,\vec{V} dxdydz = \iiint_\Omega 4\sqrt{x^2+y^2+z^2} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi) d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} (4r) r^2 dr =$$
$\boxed{12\pi}$

Exercice 6. (Exercice Bonus)

1. **Solution:** On a $\lim_n \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \dfrac{n^3}{(n+1)^3} = 1$, d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est $R = 1$.
D'autre part, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{(-1)}{n^2}$ sont des séries de Riemann convergentes. Ainsi le domaine de convergence de $\sum \dfrac{x^n}{n^3}$ est $D = [-1, 1]$.
2. **Solution:** On a pour n pair, $n^{(-1)^n} = n$, d'où $\frac{1}{n} \leqslant n^{(-1)^n} = n \leqslant n$. et pour n impair, $n^{(-1)^n} = n^{-1} = \frac{1}{n}$, d'où $\frac{1}{n} \leqslant n^{(-1)^n} = n \leqslant n$. Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n} \leqslant n^{(-1)^n} \leqslant n$.
Le critère de d'Alembert, montre que les séries entières $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} x^n$ ont un rayon de convergence égal à 1, par suite, par le critère de comparaison on aura que la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$ le même rayon de convergence $R = 1$.
3. **Solution:** On pose $X = x^2$.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n X^{n+1} = X^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n X^{n-1} = X^2 \left(\frac{1}{1-X}\right)'$$
$$= X^2 \frac{1}{(1-X)^2} = \frac{X^2}{(1-X)^2} = \frac{x^4}{(1-x^2)^2}.$$